

**UNTERSUCHUNGEN AN EINER
WEICH-QUANTISIERTEN MASSENGEBROCHENEN
QUANTENFELDTHEORIE**

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Physik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Lutz Michalk
aus Berlin

Dezember 1975

1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

**UNTERSUCHUNGEN AN EINER
WEICH-QUANTISIERTEN MASSENGEBROCHENEN
QUANTENFELDTHEORIE**

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Physik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Lutz Michalk

aus Berlin

Dezember 1975



1. Gutachter: Prof. Dr. B. Schroer
2. Gutachter: Prof. Dr. W. Zimmermann

Tag der mündlichen Prüfung: 24.2.1976

Zusammenfassung

Im Rahmen eines erweiterten BPHZ-Formalismus wird eine Quantenfeldtheorie mit Massenbrechung untersucht. Es werden Normalprodukt- und Wilsonentwicklungen hergeleitet und anhand dieser Entwicklungen sowie Callan-Symanzik-Gleichungen die Beziehungen zwischen symmetrischer und unsymmetrischer Theorie aufgezeigt. Der Zusammenhang zwischen additiver und multiplikativer Renormierung des Modells wird dargestellt. Anhand parametrischer Differentialgleichungen und Normalproduktentwicklungen wird für ein vollständig weich-quantisiertes (Kadanoff-parametrisiertes) massives Modell der Zusammenhang des Verhaltens der Vertexfunktionen für kurze Abstände und Masse - Null-Limes untersucht.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung: Symmetriebrechung und asymptotische Invarianz	1
1. Kapitel: Das Modell	6
2. Kapitel: Bewegungsgleichungen und Wardidentitäten	8
3. Kapitel: Normalprodukt- und Wilsonentwicklungen	12
4. Kapitel: Callan-Symanzik-Gleichungen	21
5. Kapitel: Massenbrechungsabhängigkeit der präasymptotischen Vertexfunktionen und ihrer ersten Korrektur	27
6. Kapitel: Äquivalenz von weicher und harter Quantisierung	33
7. Kapitel: Zusammenhang zwischen multiplikativer und additiver Renormierung	36
8. Kapitel: Normalproduktentwicklungen in einem massiven, vollständig weich-quantisierten Modell	40
Anhang	50
Literaturverzeichnis	55
Danksagung	

Einleitung ^{1) 2)}: Symmetriebrechung und asymptotische Invarianz

In vier Raum-Zeit-Dimensionen sei eine renormierbare Lagrange-
dichte ³⁾

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_s(x) + \hbar O(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{ct}(x)$$

gegeben. Dabei seien $\mathcal{L}_s$ eine - z.B. O_2 -invariante - Lagrange-
dichte, $O(x)$ ein Monom in den Grundfeldern, welches die Symmetrie
bricht und dessen kanonische Dimension $d_0 < 4$ sein soll und $\hbar$ ein
reeller Parameter.

Falls $\mathcal{L}_0$ symmetrisch bzgl. derselben Transformationen wie $\mathcal{L}_s$ ist
und die Counterterme unabhängig von $\hbar$ sind, so kann man im Rahmen
des BPHZ-Formalismus zeigen:

$$\frac{\partial}{\partial \hbar} \langle T \tilde{X} \rangle \sim \int dx \langle T N_\delta[O](x) \tilde{X} \rangle \quad (1)$$

wobei

$$\tilde{X} = \prod_{i=1}^n \tilde{A}(p_i)$$

und

$$\langle T \tilde{X} \rangle = \text{BPHZ Finite Part } \langle T \tilde{X} \exp\{i \int dx : \mathcal{L}_{\text{int, eff.}}^{\circ} : \}_s^4 \rangle$$

ist und $\mathcal{L}_{\text{int, eff.}}$ als Teil einer effektiven Lagrangedichte im Sinne
von Zimmermann zu verstehen ist. Die Symbole " $\circ$ " bzw. " $\circ$ " bedeuten,
daß Vakuumgraphen weggelassen bzw. freie Felder verwandt werden.

Falls nun $O(x)$ minimal subtrahiert ist, d.h. $\delta = d_0$ gilt, und die
Normierungsbedingungen unabhängig von $\hbar$ sind, so folgt nach dem
Weinberg-Power-Counting-Theorem ⁵⁾ für große euklidische, nicht
exzeptionelle Impulse p_i , im Limes $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{\lambda p_1, \dots, \lambda p_n\}$:

$$\frac{\partial}{\partial \hbar} \langle T \tilde{X} \rangle \Big|_{as} = 0 \quad (2)$$

da die rechte Seite von (1) in diesem Fall um zwei Potenzen stärker in λ abfällt als die linke und daher asymptotisch zu vernachlässigen ist. Man erhält also asymptotische Invarianz der Greensfunktionen bzw. Vertexfunktionen. Wenn dieses Verhalten für eine Symmetriebrechung vorliegt, so nennt man sie "weich" und ϵ einen "weichen" Parameter; ein Renormierungsschema, welches dieses Verhalten erzeugt, nennt man "weiche" Quantisierung.

Bereits vor der Entwicklung des BPHZ-Formalismus stellte sich die Frage, ob und wie man weiche Symmetriebrechungen in der renormierten Störungstheorie behandeln kann, etwa im BPH-Verfahren ^{3) 6) 7) 8)} : Dabei werden - im Gegensatz zu BPHZ - die Propagatoren zunächst regularisiert, dann werden Taylorsubtraktionen vorgenommen, die Loop-Integrationen ausgeführt und schließlich - z.B. bei Pauli-Villars-Regularisierung - die Regulatormasse gegen unendlich geschickt. Die sich ergebende Renormierung ist durch Counterterme erzeugbar und entspricht einer Renormierung der Felder und Kopplungskonstanten durch (unendliche) Z-Faktoren. Bei der Beantwortung der Frage, ob eine in diesem Rahmen behandelte Symmetriebrechung zu asymptotischer Invarianz führt, muß man zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $\epsilon O(x)$ ist eine Wechselwirkung. Da die Dimension $d_0 < 4$ ist, folgt, daß diejenigen Renormierungsteile ⁴⁾ mit der größten superfiziellen Divergenz den symmetriebrechenden Vertex nicht enthalten können. Daraus folgt, daß diejenigen Counterterme O_i mit Dimensionen $d_{0_i} = 4$ zur symmetrischen Theorie gehören, falls man die Normierungsbedingungen der symmetrischen Theorie wählt. Andererseits besagt Symanzik's "memory" statement ⁹⁾, daß Renormierungsteile, welche den Vertex $\epsilon O(x)$ enthalten,

nur Counterterme $O_i(x)$ mit $d_{O_i} \leq d_0$ induzieren. Deswegen verletzen derartige Counterterme nicht die asymptotische Invarianz, falls man sie nicht übersubtrahiert.

2. Fall: Ganz anders stellt sich das Problem dar, wenn $\hbar O(x)$ Teil der freien Lagrangedichte ist, etwa eine Massenbrechung im ϕ -Modell¹⁰⁾: Dann steckt die Symmetriebrechung nicht in gewissen Vertices, sondern in den Propagatoren. Jedoch hat B. Lee¹¹⁾ gezeigt, daß auch in diesem Fall alle Divergenzen durch Counterterme der symmetrischen Theorie beseitigt werden können. Der entscheidende Punkt bei dem Beweis besteht in der Beobachtung, daß man eine Massenbrechung als eine formal aufsummierte Wechselwirkung zu jeder festen Ordnung Störungstheorie in der Kopplungskonstanten der symmetrischen Theorie auffassen kann. Daher sind alle divergenten Graphen - bis auf Faktoren - solche der symmetrischen Theorie. Das bedeutet, daß eine weiche Symmetriebrechung, welche in der Baumgraphennäherung realisiert ist, die Renormierung "überlebt" und in jeder Ordnung Störungstheorie zu asymptotischer Invarianz führt. Mithin kann man im BPH-Formalismus jede Symmetriebrechung $\hbar O(x)$ mit $d_0 < 4$ weich behandeln.

Es ist bekannt⁴⁾, daß BPH- und BPHZ-konstruierte Greensfunktionen übereinstimmen. Daher muß auch im BPHZ-Formalismus jede der erwähnten Symmetriebrechungen auch weich behandelbar sein. Jedoch können dabei technische Probleme auftreten:

1. Fall: $\hbar O(x)$ beschreibt eine Wechselwirkung und gehört zu $\mathcal{L}_{int\ eff}$. Dann kann man $O(x)$ im Sinne von BPHZ als $N[O](x)$, d.h. minimal, quantisieren und man erhält - bei richtiger Wahl

der Normierungsbedingungen - Gleichung (2) .

2. Fall: $\hbar O(x)$ ist ein symmetriebrechender Massenterm, z.B.

$\delta m^2 A_2^2$ in einer (sonst) O_2 -invarianten zweikomponentigen Feldtheorie. Man steht dann vor folgenden Möglichkeiten:

- 1) Man betrachtet $\delta m^2 A_2^2(x)$ als Teil der freien Lagrangedichte. Bei Anwendung der BPHZ-Vorschriften erhält man zwar die klassischen Bewegungsgleichungen (BWGL) und WARD-Identitäten (WI), jedoch wird $\delta m^2 A_2^2$ zwangsläufig als N_4 quantisiert, so daß sich keine asymptotische Invarianz ergibt ("klassisch" heißt hier eine Relation, welche man - bis auf Kontaktterme - aus der klassischen Lagrangedichte im Rahmen einer nichtquantisierten Feldtheorie herleiten kann). Man ist deswegen - im Rahmen des BPHZ-Formalismus - nur imstande, eine Massenbrechung als Teil von $\mathcal{L}_{o,eff}$ als Unsymmetrie, jedoch nicht als Partialsymmetrie im Sinne von Wilson und Symanzik zu behandeln ^{12) 13)}. Nur durch Addition weiterer unsymmetrischer "Counterterme" zur ursprünglichen Lagrangedichte kann man die asymptotische Invarianz - via Zimmermann-Identitäten - erzwingen ¹⁴⁾.
- 2) Man faßt $\delta m^2 A_2^2$ als Wechselwirkung auf und quantisiert minimal im Sinne von BPHZ. Dabei ergeben sich die klassischen BWGL und WI sowie die "softness Bedingung" (2), jedoch steht in den freien Propagatoren nicht die "richtige" Masse $m^2 + \delta m^2$, sondern nur m^2 . Erst wenn es gelingt, zu jeder festen Ordnung Störungstheorie der symmetrischen Theorie die Massenbrechung vollständig aufzusummieren, erhält man die Masse $m^2 + \delta m^2$ in den Propagatoren. Die Lösung dieses Aufsummationsproblems besteht in einer Erweiterung des üblichen BPHZ-Formalismus und heißt LZ- oder "soft quantization" ¹⁵⁾. Sie unterscheidet sich von der BPHZ-Vorschrift dadurch, daß die Tayloroperatoren nicht nur auf die äußeren Impulse p_r eines Renormierungsteiles χ , sondern gleichzeitig auf den "softness parameter" δm_χ

oder allgemeiner $\hbar_\gamma$ in γ wirken. Dabei geschehen solche Subtraktionen bei Null. Diese Vorschrift führt zu folgender Identität:

$$N_\gamma[\hbar O](x) = \hbar N_{\gamma-d_\hbar}[O](x) \quad (3)$$

wobei $d_\hbar$ die kanonische Dimension von $\hbar$ ist. Wegen (3) gestattet es dieses Quantisierungsschema einerseits eine Massenbrechung von vornherein als Teil der freien Lagrangedichte aufzufassen und dennoch asymptotische Invarianz, klassische BWGL und WI zu erhalten; andererseits kann man sich diese "weichquantisierte" Massenbrechung immer formal aus einer Wechselwirkung hervorgegangen denken. Die LZ-Version des BPHZ-Formalismus - im weiteren nur noch weiche Quantisierung genannt - stellt also die technische Lösung des Problems dar, im BPHZ-Rahmen weiche Massenbrechungen zu behandeln.

1. Kapitel: Das Modell

Das weiche Quantisierungsschema soll nun bei der Untersuchung des folgenden massengebrochenen Modells angewandt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = N_4 \left[\frac{1}{2} (1+b) (\partial_\mu \hat{A})^2 + \frac{1}{2} (a-rm^2) \hat{A}^2 - \frac{g-c}{4!} (\hat{A}^2)^2 \right] (x) \\ - \frac{1}{2} (1-\delta a) N_4 [\delta m^2 A_2^2] (x) \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei ist $\hat{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ ein reeller O_2 -Vektor.

Diese effektive Lagrangedichte enthält einen O_2 -symmetrischen und einen O_2 -brechenden Teil und entsteht aus einer klassischen Lagrangedichte durch weiche Quantisierung mit δm als weichem Parameter. Die Brechung $-\frac{1}{2} N_4 [\delta m^2 A_2^2] (x)$ wird als Teil von $\mathcal{L}_{0,\text{eff}}$ behandelt. Die endlichen Counterterme $a, b, c, \delta a$ werden durch folgende Normierungsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)(1,1)}(p^2) \Big|_{p^2 = \delta m^2 = 0} &= -i m^2 \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)(1,1)}(p^2) \Big|_{p^2 = \delta m^2 = 0} &= +i \\ \Gamma^{(4)(1,1,1,1)}(p_1, p_2, p_3, -\sum_{i=1}^3 p_i) \Big|_{p_i = \delta m = 0} &= -i g \\ \frac{\partial^2}{\partial (\delta m)^2} \Gamma^{(2)(2,2)}(p^2) \Big|_{p^2 = \delta m^2 = 0} &= -2i \end{aligned} \quad (5)$$

Aufgrund der $\delta m = 0$ -Bedingung in den Gleichungen (5) erhält man δm -unabhängige Counterterme in Form formaler Potenzreihen in g . Damit sind - neben der weichen Quantisierung - alle Voraussetzungen erfüllt, um asymptotisch O_2 -invariante Greens- bzw. Vertexfunktionen

⁺) Wir benutzen die Metrik $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

zu erhalten; denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \delta m^2} \langle T \tilde{X} \rangle = \frac{1}{2} (\delta a - 1) \int dx N_2 A_1^2(x) \langle T \tilde{X} \rangle \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta m^2} \langle T \tilde{X} \rangle \right|_{a_5} = 0 \quad (7)$$

Im übrigen führt die spezielle Form der Gleichungen (5)

auf $a = b = c = \delta a = 0$.

Die Zweipunktvertexfunktionen der Felder A_1, A_2 haben die Form:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)(1,1)}(p^2) &= +i(p^2 - m^2 + a - b p^2 - \Sigma^{(1,1)}(p^2)) \\ \Gamma^{(2)(2,2)}(p^2) &= +i(p^2 - m^2 - \delta m^2 + a - b p^2 + \delta a \delta m^2 - \Sigma^{(2,2)}(p^2)) \end{aligned} \quad (8)$$

Aus den Normierungsbedingungen der renormierten Integranden und den Gleichungen (5) folgt:

$$a = b = c = \delta a = 0 \quad (9)$$

Deswegen gilt

$$\Gamma^{(2)(2,2)}(p^2) = +i(p^2 - m^2 - \delta m^2 - \Sigma^{(2,2)}(p^2))$$

und daher

$$\begin{aligned} a \quad \Gamma^{(2)(2,2)}(p^2) \big|_{p^2 = \delta m^2 = 0} &= -i m^2 \\ b \quad \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)(2,2)}(p^2) \big|_{p^2 = \delta m^2 = 0} &= +1 \end{aligned} \quad (10)$$

2. Kapitel: Bewegungsgleichungen und Wardidentitäten

Im Gegensatz zur harten Quantisierung geben in der weichen Quantisierung "self closing loop graphs" (kurz geschlossene Schleifen):



i. a. nicht-verschwindende Beiträge. Dennoch kann man im Rahmen der LZ-Quantisierung die klassischen Bwgl. und WI beweisen, falls man in der Gell-Mann-Low-Formel nicht wickgeordnete Wechselwirkungen und nicht wickgeordnete zusammengesetzte Felder benutzt^{16, 17)}
Zwei klassische Bwgl. lauten

$$A_2(x) (\partial_x^2 + m^2) A_1(x) = \alpha A_1(x) A_2(x) - \beta A_2(x) \partial^2 A_1(x) - \frac{g-c}{3!} (A_1^3(x) A_2(x) + A_1(x) A_2^3(x)) \quad (11)$$

$$A_1(x) (\partial_x^2 + m^2 + \delta m^2) A_2(x) = (\alpha + \delta \alpha \delta m^2) A_1(x) A_2(x) - \beta A_1(x) \partial^2 A_2(x) - \frac{g-c}{3!} (A_1(x) A_2^3(x) + A_1^3(x) A_2(x)) \quad (12)$$

Mit Hilfe der effektiven Lagrangedichte(4) erhält man entsprechend (siehe Anhang) :

$$\begin{aligned} \langle TN_4 [A_2(x) K_X A_1(x)] X \rangle &= - \frac{g-c}{3!} \langle TN_4 [A_1^3 A_2 + A_1 A_2^3](x) X \rangle \\ &+ \alpha \langle TN_4 [A_1 A_2](x) X \rangle - \beta \langle TN_4 [A_2 \partial^2 A_1](x) X \rangle \quad (11)' \\ &- \gamma \sum_{\substack{j=1 \\ i_j=1}}^N \delta(x - x_j) \langle T A_2(x) X \rangle_{\hat{i}_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle T N_4 [A_1(x) (K_x + \delta_{xx})^2, A_2(x)] X \rangle &= - \frac{g-c}{3!} \langle T N_4 [A_1^3 A_2 + A_1 A_2^3](x) X \rangle \\
 &+ a \langle T N_4 [A_1 A_2](x) X \rangle - b \langle T N_4 [A_1^2 A_2^2](x) X \rangle \\
 &+ 6a \langle T N_4 [d_{\alpha\beta} A_1 A_2](x) X \rangle \\
 &- i \sum_{\substack{j=1 \\ i_j=2}}^N \delta(x-x_j) \langle T A_1(x) \hat{X}_j \rangle
 \end{aligned}
 \tag{12}'$$

wobei

$$\begin{aligned}
 X &= \prod_{\substack{j=1 \\ i_j=1}}^i A_{i_j}(x_j) \prod_{\substack{j=1 \\ i_j=2}}^N A_{i_j}(x_j) \\
 K_x &= \partial_x^2 + m^2
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Das Symbol $\hat{X}_j$ bedeutet, daß das Feld $A_{i_j}(x_j)$ in X fehlt.

Man sieht, daß die Bewegungsgleichungen der klassischen und der quantisierten Theorie bis auf Kontaktterme übereinstimmen.

Aus den Gleichungen läßt sich sofort die Ward-Identität des O_2 -Noetherstromes herleiten. Man setzt

$$j_\mu(x) = N_3 [j_\mu^{cl}](x) \tag{13}$$

wobei

$$j_\mu^{cl}(x) = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}^{cl}}{\partial A_k} \delta A_k = (1+\theta) [(\partial_\mu A_1) A_2 - (\partial_\mu A_2) A_1]$$

der klassische Noetherstrom ist, welcher zu der Transformation

$$\begin{aligned}
 A_1(x) &\longrightarrow \cos \theta A_1(x) + \sin \theta A_2(x) \\
 A_2(x) &\longrightarrow -\sin \theta A_1(x) + \cos \theta A_2(x)
 \end{aligned}$$

gehört,

Aus (13) und (11)', (12)' folgt:

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \langle T g_\mu(x) X \rangle &= (1 + \delta) \langle T N_+ [A_2 \partial^2 A_1 - A_1 \partial^2 A_2](x) X \rangle \\
 &= (1 - \delta_a) \langle T N_+ [\delta m^2 A_1 A_2](x) X \rangle \\
 &\quad + i \sum_{\substack{j=1 \\ i_j=2}}^N \delta(x - x_j) \langle T A_1(x) X \rangle_{\hat{i}_j} \\
 &\quad - i \sum_{\substack{j=1 \\ i_j=1}}^N \delta(x - x_j) \langle T A_2(x) X \rangle_{\hat{i}_j}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Man sieht, daß auch in der quantisierten Theorie die O_2 -Symmetriebrechung nur von Termen δm^2 und $\delta_a \delta m^2$ herrührt. Wegen

$$\langle T N_+ [\delta m^2 A_1 A_2](x) X \rangle = \delta m^2 \langle T N_2 [A_1 A_2](x) X \rangle \tag{15}$$

ergibt sich aus (14) nach Integration über x , daß die infinitesimale Änderung der Greensfunktionen unter O_2 -Transformationen der äußeren Felder für große nichtexzeptionelle Impulse asymptotisch Null wird. Das ist ein anderer Ausdruck für den Inhalt von Gleichung (7). Mit Hilfe der Bewgl. erhält man ebenfalls die Translationsinvarianz der Greensfunktionen. Dazu betrachtet man den klassischen Energieimpulstensor¹⁸⁾, seine quantisierte Form sowie dessen Ward-Identität:

$$\theta_{\mu\nu}(x) = N_+ \left[\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu A_k} \partial_\nu A_k - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right](x) \tag{16}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \langle T \theta_{\mu\nu}(x) X \rangle &= \partial^\mu \langle T N_4 \left[\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu A_k} \partial_\nu A_k - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right](x) X \rangle \quad (17) \\
 &= \langle T N_5 \left[\sum_k \left\{ \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu A_k} \right) \partial_\nu A_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu A_k} \partial^\mu \partial_\nu A_k \right\} - \partial_\nu \mathcal{L} \right](x) X \rangle \\
 &= -i \sum_{k=1}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1,2}}^N \delta_{i,j,k} \delta(x - x_j) \langle T \partial_\nu A_k(x) X \rangle
 \end{aligned}$$

Dabei wurde

$$\langle T N_5 \left[\sum_{k=1}^2 \partial_\nu A_k \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu A_k} \right](x) X \rangle = \langle T N_5 \left[\sum_{k=1}^2 \partial_\nu A_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} \right](x) X \rangle \quad (18)$$

+ KONTAKTTERME

benutzt.

Aus der integrierten Form von (17) ergibt sich die Translationsinvarianz der Greensfunktionen.

3. Kapitel: Normalprodukt- und Wilsonentwicklungen

Wegen der asymptotischen O_2 -Invarianz der Greensfunktionen liegt es nahe zu fragen, wie die Koeffizientenfunktionen und lokalen Operatoren von Wilsonentwicklungen ¹⁹⁾ im Rahmen des Modells von der Massenbrechung abhängen. Die Herleitung der Wilsonentwicklungen geschieht in zwei Schritten

- a) Normalproduktentwicklungen (NP)
- b) Wilsonentwicklungen ⁴⁾

a) Normalproduktentwicklungen (NP)

Es sollen Gleichungen folgenden Typs hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \langle T N_\alpha [A_i(x+\xi) A_j(x-\xi)] \tilde{X} \rangle &= \langle T N_\beta [A_i(x+\xi) A_j(x-\xi)] \tilde{X} \rangle \\ &+ \sum_k G_k(\xi) \langle T N [O_k](x) \tilde{X} \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

wo o.B.d.A. $a > b \geq 0$ und $i, j \in \{1, 2\}$ ist

sowie

$$\tilde{X} = \prod_{k=1}^N \tilde{A}_{i_k}(p_k)$$

$i_k = 1, 2$

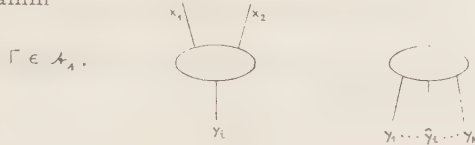
Diese Normalproduktentwicklungen sollen auf folgendem Typ von Feynmangraphen geschehen:

Def.: Sei Γ irgendein Graph, welcher zu

$$\langle T A_i(x_1) A_j(x_2) A_{i_1}(\gamma_1) \dots A_{i_N}(\gamma_N) \rangle \text{ beiträgt,}$$

so sagen wir, Γ gehört zum Typ $\mathcal{A}_1$, falls x_1, x_2

und mindestens ein y_i zur selben verbundenen Komponente gehören. Graphen, welche aus $\mathcal{A}_1$ durch Identifikation von x_1 und x_2 entstehen, heißen vom Typ $\mathcal{B}_1$. Das entsprechende Diagramm



welches dabei aus Γ entsteht, sei Δ .

Entsprechend:



Im Gegensatz zur harten Quantisierung lassen sich in der weichen nicht-triviale Normalproduktentwicklungen auf Graphen vom Typ $\mathcal{A}_3$ herleiten. Diese kann man dazu benutzen, um den trivialen unsymmetrischen Beitrag der $\Gamma \in \mathcal{A}_3$ zur Wilsonentwicklung um die symmetrische Theorie zu entwickeln. (Es gilt: $\langle T N_0 [A_i(x_1) A_j(x_2)] \tilde{X} \rangle_{\Gamma \in \mathcal{A}_3} = [\langle T A_i(x_1) A_j(x_2) \rangle_{\text{unsymm.}} - \langle T A_i(x_1) A_j(x_2) \rangle_{\text{symm.}}] \langle T \tilde{X} \rangle$)

Für die renormierten Integranden der Normalprodukte

$N_{a,b} [A_i(x_1) A_j(x_2)]$ gilt

$$R_{\Delta}^{a,b} = S_{\Delta} \sum_{U \in u_{a,b}(\Delta)} \prod_{f \in U} (-t_{a,b}^f S_f) I_{\Delta} \quad (20)$$

Daraus erhält man

$$R_{\Delta}^a = R_{\Delta}^b + S_{\Delta} \sum_{\tau \in T_{\Delta}} \sum_{u_a \in u_{\tau}} \sum_{u_b \in u_{\tau}} \prod_{f \in u_a} (-t_a^f S_f) [- (t_a^{\tau} - t_b^{\tau}) S_{\tau}] \prod_{f \in u_b} (-t_b^f S_f) I_{\Delta} \quad (21)$$

Dabei gilt

Def.:

$$T_a = \{\tau | \tau \subset \Delta, \tau \text{ eigentlich}, V_0 \in \tau, d_a(\tau) \geq 0\}$$

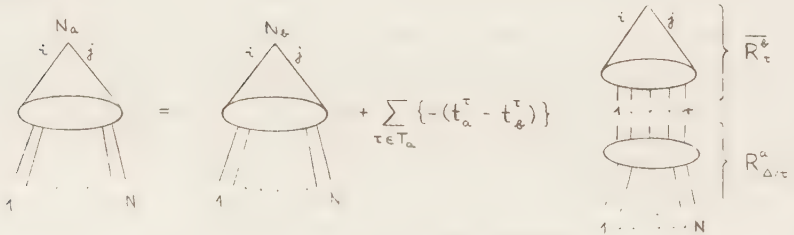
V_0 ist der Vertex, welcher durch Identifikation von x_1 und x_2 entsteht.

Def.: $\mathcal{M}_\tau$ = Menge aller U_1 - Wälder

wo U_1 ein Δ -Wald ist, mit der Eigenschaft, daß alle Elemente größer als oder disjunkt von τ sind.

Def.: U_τ = Menge aller τ -Wälder.

In Bildern:



Ein Unterschied zwischen weicher und harter Quantisierung macht sich nun in der expliziten Form des Operators $t_a^\tau - t_b^\tau$ bemerkbar. Sei $\tau \in T_a$ gegeben, seien $p_0^\tau, p_1^\tau, \dots, p_r^\tau$ die äußeren Impulse von τ . Dann gilt

$$t_a^\tau - t_b^\tau = \sum_{(q, a)}^a \frac{1}{6! \prod_{j=1}^6 (\#(q)_j)!} p_{1(q)_1}^\tau \cdots p_{r(q)_r}^\tau (\partial m^\tau)^\epsilon \theta_{(p^\tau)_{\delta, m^\tau}}^\tau \partial_{p_1^\tau}^{(q)_1} \cdots \partial_{p_r^\tau}^{(q)_r} \partial_{\delta m^\tau}^\epsilon$$

Der Index an der Summe bedeutet, daß diese durch

$$6 < \sum_{j=1}^r \#(q)_j + r + 6 \leq a \quad \text{gegeben ist.}$$

- Beachte: (1) Neben Polynomen und Ableitungen in äußeren Impulsen treten solche im Symmetrierungsbrechungsparameter auf.
- (2) $\Theta_{\{p^{\tau}\} \delta m^{\tau}}$ setzt nicht nur die p_i^{τ} , sondern auch δm^{τ} gleich Null.

Nach Integration über loop-Impulse, Fouriertransformation nach x_1, x_2 bzw. $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\xi = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, Anbringen der kombinatorischen Faktoren und Summation über alle $\Gamma \in \mathcal{A}_1$ folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle T N_{\delta} [A_i(x_1) A_j(x_2)] \tilde{X} \rangle_{\Gamma} \\ &= \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle T N_{\alpha} [A_i(x_1) A_j(x_2)] \tilde{X} \rangle_{\Gamma} \\ &+ \sum_{\{q, \sigma\}}^a \left\{ \frac{1}{6!} \frac{\prod_{j=1}^r \#(q)_j G^{(6)}(q, \sigma)(\xi)}{\prod_{j=1}^r (\#(q)_j)!} \sum_{\Delta \in D'_{\pi H}} \frac{\langle T N_{\alpha} [(\delta m)^{\tau} \tilde{A}_{i_1}^{(q_1)} \tilde{A}_{j_1}^{(q_1)} \dots \tilde{A}_{i_r}^{(q_r)} \tilde{A}_{j_r}^{(q_r)}] \tilde{X} \rangle_{\Delta}}{(\sum_{j=1}^r i_j)! (\sum_{j=1}^r \frac{1}{2} j_j)!} \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

wo

$$G^{(6)}(q, \sigma) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{2\pi}} \frac{\partial^6}{\partial (\delta m^{\tau})^6} \langle T N_{\delta} [A_i(\xi) A_j(\xi)] \tilde{A}_{i_1}^{(q_1)}(0) \dots \tilde{A}_{i_r}^{(q_r)}(0) \rangle_{\delta}.$$

Dabei ist:

D'_{rN} die Menge aller Diagramme, welche zu

$$\langle T A(x_1) \dots A(x_r) A(y_1) \dots A(y_N) \rangle$$

beitragen, wobei

alle $x_1 \dots x_r$ identifiziert werden und der Vertex x mit mindestens einem y_i verbunden ist.

$\mathcal{F}_{2,r}$ die Menge aller eigentlichen, nicht-trivialen Diagramme mit Koordinaten $x_1, x_2, y_1, \dots, y_r$, wobei die y -Beine amputiert sind.

Die erlaubten Indexkombinationen $i_1 \dots i_r$ ergeben sich aus der Paritätsinvarianz der Theorie.

In Gleichung (23) treten i.a. übersubtrahierte lokale Normalprodukte auf. Betrachtet man die Gleichung jedoch für den Fall $a = b + 1$, so sind wegen

$$b < \sum_{j=1}^r \#(q)_j + r + \omega \leq b + 1$$

alle lokalen Operatoren minimal subtrahiert:

$$\sum_{j=1}^r \#(q)_j + r + \omega = \dim((dm)^{\otimes} A_{i_1}^{(q)_1} \dots A_{i_r}^{(q)_r}) = b + 1 \quad (24)$$

Löst man das sich ergebende Rekursionsproblem und beginnt bei $b = 0$, so erhält man

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle TN_0[A_i(x_1)A_j(x_2)]\tilde{X} \rangle_{\Gamma} \quad (25)$$

$$= \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle TN_a[A_i(x_1)A_j(x_2)]\tilde{X} \rangle_{\Gamma} + \sum_{(q,\omega)} \left\{ \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^r \#(q)_j} G^{(q,\omega)}(\chi)}{\omega! \prod_{j=1}^r (\#(q)_j)!} \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_{r,H}} \frac{\langle TN_{-1}[(dm)^{\otimes} A_{i_1}^{(q)_1} \dots A_{i_r}^{(q)_r}] \tilde{X} \rangle_{\Delta}}{(\sum_{j=1}^r \nu_j)! (\sum_{j=1}^r \frac{1}{2} i_j)!} \right\}$$

wobei

$$G^{(q,\omega)}(\chi) = G^{(\omega)}(q,\omega)$$

mit

$$b = \sum_{j=1}^r \#(q)_j + r + \omega - 1$$

ist. Normalprodukte ohne Index sind minimal subtrahiert.

Auf Diagrammen $\Gamma \in \mathcal{A}_1$ stimmen das bilokale N_0 und das verallgemeinerte Wickprodukt überein. Daher stellt (25) eine Entwicklung von $\langle T : A_i(x_1) A_j(x_2) : \tilde{X} \rangle_{\Gamma \in \mathcal{A}_1}$ nach lokalen Operatoren dar.

b) Wilson-Entwicklungen (M-Produktentwicklungen)

Gleichung (25) ist jedoch keine asymptotische Entwicklung, da der Rest $\langle T N_a [A_i(x_1) A_j(x_2)] \tilde{X} \rangle_{\Gamma}$ für $x_1 \rightarrow x_2$ i. a. nicht verschwindet. Durch Übergang von bilokalen Normal- zu M-Produkten kann dieser Mangel jedoch behoben werden. Man erhält

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle T : A_i(x_1) A_j(x_2) : \tilde{X} \rangle_{\Gamma} \quad (26)$$

$$= \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle T M_a [A_i(x_1) A_j(x_2)] \tilde{X} \rangle_{\Gamma} + \sum_{\{q, \sigma\}} \left\{ \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^r q_j} H^{(q, \sigma)}(\xi)}{G! \prod_{j=1}^r (\#(q)_j)!} \sum_{\Delta \in D_{rN}} \frac{\langle T N [(\delta m)^{\otimes} A_{i_1}^{(q_1)} \dots A_{i_r}^{(q_r)}](x) \tilde{X} \rangle_{\Delta}}{\left(\sum_{j=1}^r i_j \right)! \left(\sum_{j=1}^r \frac{1}{2} i_j \right)!} \right\}$$

wo

$$H^{(q, \sigma)} = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_2^r} \left\{ \frac{\partial^{\sigma}}{\partial (\delta m^{\tau})^{\otimes}} \langle T M_a [A_i(\xi) A_j(\xi)] \tilde{A}_{i_1}^{(q_1)}(0) \dots \tilde{A}_{i_r}^{(q_r)}(0) \rangle \Big|_{\delta m^{\tau} = 0} + \text{TRIVIALER Teil} \right\}$$

und

$$G = r + \sigma + \sum_{j=1}^r (\#(q)_j) - 1$$

Dabei sind die M-Produkte durch folgende Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned} \text{Def.:} \quad M_a [A_i(x_1) A_j(x_2)] &= N_a [A_i(x_1) A_j(x_2)] && \text{für } a = 0, 1 \\ M_a [A_i(x_1) A_j(x_2)] &= (1 - t_{\xi}^{a-2}) N_a [A_i(x_1) A_j(x_2)] && \text{für } a \geq 2 \end{aligned} \quad (27)$$

Die Gleichung (26) stellt einen Teil der Wilsonentwicklung dar; denn die M-Produkte haben folgende Abfalleigenschaften:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\langle T M_a [A_i(x+\xi) A_j(x-\xi)] \rangle}{q^{a-2}} = 0 \text{ für } a-2 \geq 0, \text{ wo } q = |\xi^2|^{1/2}.$$

Bisher wurden nur Entwicklungen auf Graphen vom Typ $\mathcal{A}_1$ betrachtet. Die Entwicklungen auf Graphen vom Typ $\mathcal{A}_3$ lassen sich daraus sofort herleiten, indem man alle Terme, welche Ableitungen nach äußeren Impulsen enthalten, wegläßt. Beachtet man, daß auf Graphen vom Typ $\mathcal{A}_2$ das verallgemeinerte Wick-Produkt von zwei Operatoren mit dem N_0 und dieses mit Normalprodukten von beliebigem Index übereinstimmen, so erhält man nach Summation über alle Graphen $\mathcal{A}_i$ ($i = 1, 2, 3$) und Abspaltung der äußeren Beine die endgültige Form der Wilson-Entwicklung:

$$\begin{aligned} T A_i(x_1) A_j(x_2) &= \langle T A_i(\xi) A_j(-\xi) \rangle_{\text{symm.}} \mathbf{1} + M_a [A_i(x_1) A_j(x_2)] \\ &+ \sum_{\{q, \sigma\}}^a \left\{ \frac{(-i)^{\sum_{i=1}^r \#(q)_i} H^{(q, \sigma)}(\xi)}{\sigma! \prod_{j=1}^r (\#(q)_j)!} \frac{N[(\sigma m)^{\otimes (q)_a} A_{i_1}^{(q)_1} \dots A_{i_r}^{(q)_r}](x)}{(\sum_{i=1}^r i_j)! (\sum_{j=1}^r \frac{1}{2} i_j)!} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

Beispiele:

$$\langle T : A_1(x_1) A_1(x_2) : \tilde{X} \rangle = \langle T M_2 [A_1(x_1) A_1(x_2)] \tilde{X} \rangle \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{j=1,2} \{ \langle T M_0 [A_1(\xi) A_1(-\xi)] \tilde{A}_j(0) \tilde{A}_j(0) \rangle_{\delta m=0}^p \\ &+ \frac{1}{2} \langle T N_2 [A_j(x) A_j(x)] \tilde{X} \rangle, \end{aligned}$$

wobei

$$\langle T M_2 [A_1(x_1) A_1(x_2)] \tilde{X} \rangle = \langle T N_2 [A_1(x_1) A_1(x_2)] \tilde{X} \rangle - \langle T N_2 [A_1^2(x)] \tilde{X} \rangle.$$

$$\langle T M_3 [A_2(x_1) A_2(x_2)] \tilde{X} \rangle = \langle T M_4 [A_2(x_1) A_2(x_2)] \tilde{X} \rangle \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_i \left\{ \frac{(i-1)^2}{2!} \langle T M_3 [A_2(\xi) A_2(-\xi)] \partial^\mu \partial^\nu \tilde{A}_i(0) \tilde{A}_i(0) \rangle_{\delta m=0}^p \right. \\ &\quad \times \langle T N_4 [\partial_\mu \partial_\nu A_j(x) A_j(x)] \tilde{X} \rangle \} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_j \left\{ \frac{1}{2!} \langle \text{TM}_3 [A_2(\xi) A_2(-\xi)] \partial^\mu \tilde{A}_j(0) \partial^\nu A_j(0) \rangle_{\delta m, 0}^P \right. \\
 & \quad \times \frac{1}{4!} \langle \text{TN}_4 [\partial_\mu A_j(x) \partial_\nu A_j(x)] \tilde{X} \rangle \Big\} \\
 & + \sum_j \left\{ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial(\delta m)^2} \langle \text{TM}_3 [A_2(\xi) A_2(-\xi)] \tilde{A}_j(0) A_j(0) \rangle_{\delta m, 0}^P \right] \right. \\
 & \quad \times \frac{1}{4!} \langle \text{TN}_4 [\partial_\mu \partial_\nu A_j^2(x)] \tilde{X} \rangle \Big\} \\
 & + \sum_j \left\{ \langle \text{TM}_3 [A_2(\xi) A_2(-\xi)] \tilde{A}_j^4(0) \rangle_{\delta m, 0}^P \right. \\
 & \quad \times \frac{1}{4!} \langle \text{TN}_4 [A_j^4(x)] \tilde{X} \rangle \Big\} \\
 & + \langle \text{TM}_3 [A_2(\xi) A_2(-\xi)] \tilde{A}_1^2(0) \tilde{A}_2^2(0) \rangle_{\delta m, 0}^P \\
 & \quad \times \frac{1}{2! 2!} \langle \text{TN}_4 [A_1^2(x) \tilde{A}_2^2(x)] \tilde{X} \rangle \Big\}
 \end{aligned}$$

$$\langle \text{TN}_3 [A_1(x_1) A_2(x_2)] \tilde{X} \rangle = \langle \text{TN}_4 [A_1(x_1) A_2(x_2)] \tilde{X} \rangle \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(i)^2}{2!} \langle \text{TN}_3 [A_1(\xi) A_2(-\xi)] \partial^\mu \partial^\nu \tilde{A}_1(0) \tilde{A}_2(0) \rangle_{\delta m, 0}^P \times \\
 & \quad \times \langle \text{TN}_4 [\partial_\mu \partial_\nu A_1(x) A_2(x)] \tilde{X} \rangle \\
 & + \frac{(i)^2}{2!} \langle \text{TN}_3 [A_1(\xi) A_2(-\xi)] \tilde{A}_1(0) \partial^\mu \partial^\nu \tilde{A}_2(0) \rangle_{\delta m, 0}^P \times \\
 & \quad \times \langle \text{TN}_4 [A_1(x) \partial_\mu \partial_\nu A_2(x)] \tilde{X} \rangle \\
 & + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial(\delta m)^2} \langle \text{TN}_3 [A_1(\xi) A_2(-\xi)] \tilde{A}_1(0) \tilde{A}_2(0) \rangle_{\delta m, 0}^P \right] \times \\
 & \quad \times \langle \text{TN}_4 [\delta m^2 A_1(x) A_2(x)] \tilde{X} \rangle
 \end{aligned}$$

+ ...

$$\begin{aligned}
 & \dots + \frac{1}{2!} \langle \text{TN}_3 [A_1(\xi) A_1(-\xi)] \hat{A}_1(0) \hat{A}_2(0) \rangle_{\delta m=0}^{p'} \dots + \frac{1}{4!} \langle \text{TN}_4 [A_1(\xi) A_1(-\xi) A_2(x) A_2(x)] \tilde{X} \rangle \\
 & + \langle \text{TN}_3 [A_1(\xi) A_2(-\xi)] \tilde{A}_1^3(0) \tilde{A}_2^3(0) \rangle_{\delta m=0}^{p'} \frac{1}{3!} \langle \text{TN}_4 [A_1^3(x) A_2(x)] \tilde{X} \rangle \\
 & + \langle \text{TN}_3 [A_1(\xi) A_2(-\xi)] \tilde{A}_1(0) \tilde{A}_2^3(0) \rangle_{\delta m=0}^{p'} \frac{1}{3!} \langle \text{TN}_4 [A_1(x) A_2^3(x)] \tilde{X} \rangle
 \end{aligned}$$

Dabei bedeutet der Index p , daß nur eigentliche Graphen einschließlich des trivialen Teiles, der Index p' , daß nur eigentliche Graphen ohne trivialen Teil beitragen. Ein Beitrag heißt trivial, wenn er von der nullten Ordnung Störungstheorie ist.

Ergebnisse:

A. Die einzigen im Limes $\xi \rightarrow 0$ singulären Koeffizienten treten in der $N_0 \sim N_2$ -Entwicklung auf. Diese Koeffizienten enthalten jedoch nicht den Massenbrechungsparameter. Die Singularitäten der Entwicklungen sind also durch die symmetrische Theorie gegeben. Dieses Verhalten war wegen der asymptotischen O_2 -Invarianz der Greensfunktionen zu erwarten.

B. In den Normalprodukt- und Wilsonentwicklungen in der weichen Quantisierung treten im Vergleich zur harten Quantisierung neue Typen von lokalen Operatoren und Koeffizienten auf. Jedoch sind alle Koeffizienten vollständig durch die symmetrische Theorie gegeben; denn die Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial(\delta m)^2}$ kann als weiche Einsetzung aufgefaßt werden. Z. B. gilt

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial(\delta m)^2} \langle \text{TN}_3 [A_1(\xi) A_1(-\xi)] \tilde{X}(0) \rangle_{\delta m=0}^{p'} \right. \\
 \left. = -\frac{1}{2} \left[\int dx \langle \text{TN}_3 [A_1(\xi) A_1(-\xi)] N_2 [A_2^2(x)] \tilde{X}(0) \rangle_{\delta m=0}^{p'} \right] \right.
 \end{aligned} \tag{29}$$

4. Kapitel: Callan-Symanzik-Gleichungen

Mit Hilfe der hergeleiteten NP-Entwicklungen sollen die O_2 -Symmetrie-Eigenschaften der präasymptotischen Theorie und ihrer ersten Korrektur untersucht werden (siehe Kapitel 5). Diese Untersuchung soll mit Hilfe von Callan-Symanzik-Gleichungen geschehen. Deshalb sollen Callan-Symanzik-Gleichungen für folgende Objekte hergeleitet werden:

a) N-Punkt-Vertexfunktionen

$$\Gamma^{(N)} = \Gamma^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1}, -\sum_{i=1}^{N-1} p_i, g, m^2, \delta m^2)$$

b) $\Delta_0 \Gamma^{(N)}$ und $\Delta_4 \Gamma^{(N)}$

wobei gilt

$$\begin{aligned} \Delta_0 \Gamma^{(N)} &= \frac{i}{2} \int dx N_2 [\hat{A}^2](x) \Gamma^{(N)} \\ \Delta_1 \Gamma^{(N)} &= \frac{1}{2} \int dx N_4 [\hat{A}^2](x) \Gamma^{(N)} \\ \Delta_2 \Gamma^{(N)} &= \frac{1}{2} \int dx N_4 [\partial_\mu \hat{A} \partial^\mu \hat{A}](x) \Gamma^{(N)} \\ \Delta_3 \Gamma^{(N)} &= \frac{1}{4!} \int dx N_4 [(\hat{A}^2)^2](x) \Gamma^{(N)} \\ \Delta_4 \Gamma^{(N)} &= \frac{i}{2} \int dx N_4 [\delta m^2 A_2^2](x) \Gamma^{(N)} \end{aligned} \quad (30)$$

- a) Die Existenz²²⁾ und Form der CS-Gleichungen beruht darauf, daß man fünf "Operationen" durch vier linear unabhängige²³⁾ Vertexeinsetzungen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ausdrücken kann, so daß eine Relation zwischen den "Operationen" besteht. Diese "Operationen"

und ihre Beziehungen zu $\Delta_1 \dots \Delta_4$ sind im einzelnen

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \Gamma^{(N)} = \left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial m^2} - 1 \right) \Delta_1 + \frac{\partial b}{\partial m^2} \Delta_2 + \frac{\partial c}{\partial m^2} \Delta_3 + \frac{\partial \delta a}{\partial m^2} \Delta_4 \right\} \Gamma^{(N)} \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial g} \Gamma^{(N)} = \left\{ \frac{\partial a}{\partial g} \Delta_1 + \frac{\partial b}{\partial g} \Delta_2 + \left(\frac{\partial c}{\partial g} - 1 \right) \Delta_3 + \frac{\partial \delta a}{\partial g} \Delta_4 \right\} \Gamma^{(N)} \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta m^2} \Gamma^{(N)} = \frac{\delta a - 1}{\delta m^2} \Delta_4 \Gamma^{(N)} \quad (33)$$

$$N \Gamma^{(N)} = \left\{ 2(a - m^2) \Delta_1 + 2(1 + b) \Delta_2 + 4(g - c) \Delta_3 + 4(\delta a - 1) \Delta_4 \right\} \Gamma^{(N)} \quad (34)$$

$$\Delta_0 \Gamma^{(N)} = \left\{ \frac{1}{\alpha_0} \Delta_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \Delta_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \Delta_3 + \frac{\alpha_4}{\alpha_0} \Delta_4 \right\} \Gamma^{(N)} \quad (35)$$

wobei gilt

$$\alpha_0 = 1 - \frac{\delta m^2}{4} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial (\delta m^2)^2} \langle T N_3 [\hat{A}^2](0) \tilde{A}_1^2(0) \rangle P' \right\}_{\delta m^2=0}$$

$$\alpha_2 = \frac{(-1)^2}{16} \{ \langle T N_3 [\hat{A}^2](0) \partial^\mu \tilde{A}(0) \partial_\mu \tilde{A}(0) \rangle_{\delta m=0}^P$$

$$- \langle T N_3 [\hat{A}^2](0) \partial^2 \tilde{A}(0) \tilde{A}(0) \rangle_{\delta m=0}^P \}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \langle T N_3 [\hat{A}^2](0) \tilde{A}_1(0) \rangle_{\delta m=0}^P$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \langle T N_3 [\hat{A}^2](0) (\tilde{A}_2(0) - \tilde{A}_1(0)) \rangle^P \right\}_{\delta m=0}$$

Dabei stellen (34) und (35) die "Counting"-Identität bzw. eine integrierte Zimmermann-Identität dar. Diese Zimmermann-Identität ergibt sich aus (23) für $b = 2$, $a = 4$ und $x_1 = x_2 = x$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ existiert eine CS-Gleichung der Form:

$$\left\{ m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \alpha \delta m^2 \frac{\partial}{\partial \delta m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma N \right\} \Gamma^{(N)} = \varepsilon m^2 \Delta_0 \Gamma^{(N)} \quad (36)$$

Die Gleichungen können wegen $a = b = c = \delta a = 0$ stark vereinfacht werden.

Nach Einsetzen von (31) bis (35) in (36) folgt dann:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= m^2 \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{1 + m^2 \alpha_2} \\
 \beta &= 1 + 2 \frac{\alpha_2 + 2g\alpha_2}{1 + m^2 \alpha_2} \\
 \gamma &= \frac{m^2}{2} \frac{\alpha_2}{1 + m^2 \alpha_2} \\
 \varepsilon &= \frac{1}{1 + m^2 \alpha_2}
 \end{aligned} \tag{37}$$

wobei α_2 mindestens von der Ordnung g beginnt, so daß $1 + m^2 \alpha_2 \neq 0$ ist.

Zu (36) analoge Gleichungen gelten für $\Delta_0 \Gamma^{(N)}$ und $\Delta_4 \Gamma^{(N)}$.
 Sie ergeben sich aus der linearen Abhängigkeit folgender
 "Operationen":

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \Delta_i \Gamma^{(N)} = - \Delta_1 \Delta_i \Gamma^{(N)} \quad (i = 0, 4) \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial g} \Delta_i \Gamma^{(N)} = - \Delta_3 \Delta_i \Gamma^{(N)} \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \frac{\partial}{\partial m^2} \Delta_i \Gamma^{(N)} = - \Delta_4 \Delta_i \Gamma^{(N)} \tag{40}$$

$$(N-2) \Delta_1 \Gamma^{(N)} = \{-2m^2 \Delta_1 + \Delta_2 - 4g \Delta_3 - 2\Delta_4\} \Delta_1 \Gamma^{(N)} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \Delta_0 \Delta_0 \Gamma^{(N)} &= \frac{1}{\alpha_0} \Delta_1 \Delta_0 \Gamma^{(N)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \Delta_2 \Delta_0 \Gamma^{(N)} \\ &+ \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \Delta_3 \Delta_0 \Gamma^{(N)} + \frac{\alpha_4}{\alpha_0} \Delta_4 \Delta_0 \Gamma^{(N)} \\ &+ \frac{\alpha_5}{\alpha_0} \Delta_0 \Gamma^{(N)} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Delta_0 \Delta_4 \Gamma^{(N)} &= \frac{1}{\alpha_0} \Delta_1 \Delta_4 \Gamma^{(N)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \Delta_2 \Delta_4 \Gamma^{(N)} \\ &+ \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \Delta_3 \Delta_4 \Gamma^{(N)} + \frac{\alpha_4}{\alpha_0} \Delta_4 \Delta_4 \Gamma^{(N)} \\ &+ \frac{\alpha_5}{\alpha_0} \Delta_4 \Gamma^{(N)} + \frac{\alpha_7}{\alpha_0} \Delta_0 \Gamma^{(N)} \end{aligned} \quad (43)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= \frac{1}{2} \langle TN_3 [\hat{A}^2](0) \Delta_0 \tilde{A}_1^2(0) \rangle_{dm=0}^{P'} \\ \alpha_6 &= \frac{1}{2} \langle TN_3 [\hat{A}^2](0) \Delta_5 (\tilde{A}_2^2(0) - \tilde{A}_1^2(0)) \rangle_{dm=0}^{P'} \\ \alpha_7 &= \frac{1}{2} dm^2 \langle TN_3 [\hat{A}^2](0) \Delta_5 \tilde{A}_1^2(0) \rangle_{dm=0}^{P'} \end{aligned}$$

und

$$\Delta_5 = \int dx N_2 [\hat{A}_2^2](x)$$

Aus den Gleichungen (38) bis (43) ergeben sich folgende

CS-Gleichungen

$$\left\{ m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \alpha \delta m^2 \frac{\partial}{\partial \delta m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma (N-2) + \epsilon m^2 \frac{\alpha_{5,6}}{\alpha_0} \right\} \Delta_0 \Gamma^{(N)} \quad (44)$$

$$= \epsilon m^2 \Delta_0 \Gamma^{(N)}$$

$$\left\{ m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \alpha \delta m^2 \frac{\partial}{\partial \delta m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma (N-2) + \epsilon m^2 \frac{\alpha_{5,6}}{\alpha_0} \right\} \Delta_+ \Gamma^{(N)} \quad (45)$$

$$= \epsilon m^2 \Delta_0 \Delta_+ \Gamma^{(N)} - \epsilon m^2 \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \Delta_0 \Gamma^{(N)}$$

Wegen

$$\epsilon m^2 \frac{\alpha_{5,6}}{\alpha_0} = - \frac{m^2 \alpha_{5,6}}{1 + m^2 \alpha_2} \quad (46)$$

sieht man, daß nur die Koeffizientenfunktionen ϵ und $\epsilon \alpha_3 / \alpha_0$ von der Massenbrechung abhängen.

Diese Aussage bleibt auch dann richtig, wenn man andere δm^2 -unabhängige - Normierungsbedingungen an die Zwei- und Vierpunktvertexfunktion stellt, welche zu nicht-verschwindenden Counter-terms $a, b, c, \delta a$ führen. Deswegen ist die spezielle Wahl $a = b = c = \delta a = 0$ für die Frage nach der Symmetrie der präasymptotischen Theorie keine Beschränkung der Allgemeinheit.

5. Kapitel: Massenbrechungsabhängigkeit der präasymptotischen Vertexfunktionen und ihrer ersten Korrektur

Betrachtet man die N-Punkt-Vertexfunktionen und streckt alle äußeren, euklidischen, nicht-exzeptionellen Impulse gleichzeitig mit einem reellen Parameter λ , so führt die Störungstheorie zu folgendem Ausdruck

$$\begin{aligned} \Gamma^{(N)}(\{\lambda p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \\ = \lambda^{4-N} \left\{ \sum_{k_0=0}^{L_0} a_{0k_0} (\ln \lambda)^{k_0} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k_1=0}^{L_1} a_{1k_1} (\ln \lambda)^{k_1} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k_2=0}^{L_2} a_{2k_2} (\ln \lambda)^{k_2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

Ebenso

$$b) \quad \Delta_{0,4} \Gamma^{(N)}(\{\lambda p_i\}, m^2, \delta m^2, g) = \lambda^{2-N} \left\{ \sum_{k_0=0}^{L_0} \hat{a}_{0k_0} (\ln \lambda)^{k_0} + \dots \right\}$$

Dabei sind λ^{4-N} , λ^{2-N} die Weinbergpotenzen der linken Seiten.

Obige Ausdrücke definieren -geordnet nach abfallendem Verhalten in λ -

die Funktionen $\Gamma_{a5,0}^{(N)}$, $\Gamma_{a5,1}^{(N)}$, $\Gamma_{a5,2}^{(N)}$ usw. bzw. $(\Delta_{0,4} \Gamma^{(N)})_{a5,0}$ 24) 25)

$$\Delta_{0,4} \Gamma_{a5,1}^{(N)}, (\Delta_{0,4} \Gamma_{a5,2}^{(N)}) \dots$$

Im weiteren soll nun die δm -Abhängigkeit von $\Gamma_{a5,0}^{(N)}$ und $\Gamma_{a5,2}^{(N)}$ untersucht werden. ($\Gamma_{a5,1}^{(N)}$ tritt in dem Modell nicht auf).

Dazu werden zunächst Differentialgleichungen (DGL) für diese Funktionen hergeleitet.

Wegen (33) kann man Gleichung (36) auch in der Form:

$$\begin{aligned} \left\{ \ln \lambda \frac{\partial}{\partial m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma N \right\} \Gamma^{(N)}(\{p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \\ = \{ \varepsilon m^2 \Delta_0 + \alpha \Delta_4 \} \Gamma^{(N)}(\{p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \end{aligned} \quad (48)$$

Man beachte, daß Δ_+ wegen der weichen Quantisierung eine N_2 Einsetzung ist.

Schreibt man

$$\Gamma^{(N)}(\{\lambda p_i\}, m^2, \delta m^2, g) = \lambda^{4-N} \Gamma^{(N)}(\{p_i\}, \lambda^{-2} m^2, \lambda^{-2} \delta m^2, g)$$

und

$$\Delta_{0,+} \Gamma^{(N)}(\{\lambda p_i\}, m^2, \delta m^2, g) = \lambda^{4-N} \Gamma^{(N)}(\{p_i\}, \lambda^{-2} m^2, \lambda^{-2} \delta m^2, g)$$

so ergibt sich aus (48)

$$\begin{aligned} & \left\{ -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma N \right\} \Gamma^{(N)}(\{p_i\}, \lambda^{-2} m^2, \lambda^{-2} \delta m^2, g) \\ & = \{ \epsilon m^2 \Delta_0 + \alpha \Delta_+ \} \Gamma^{(N)}(\{p_i\}, \lambda^{-2} m^2, \lambda^{-2} \delta m^2, g) \end{aligned} \quad (49)$$

Da nun die Weinberg-Potenzen von $\Gamma^{(N)}(\{p_i\}, \lambda^{-2} m^2, \lambda^{-2} \delta m^2, g)$ bzw. $\Delta_{0,+} \Gamma^{(N)}(\{p_i\}, \dots)$ gleich Null und minus Zwei sind und der Operator $\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda^2}$ das Potenzverhalten eines Reihenansatzes wie in (47) nicht ändert, fällt die rechte Seite von (49) um zwei Potenzen stärker ab als der führende Term der linken Seite.

Daher folgt durch Potenzvergleich in λ :

$$\left\{ m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma N \right\} \Gamma_{as,0}^{(N)}(\{p_i\}, m^2, g) = 0 \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma N \right\} \Gamma_{as,2}^{(N)}(\{p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \\ & = (\epsilon m^2 \Delta_0 + \alpha \Delta_+) \Gamma_{as,0}^{(N)}(\{p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \end{aligned} \quad (51)$$

Ähnliche Dgl. gelten für $\Gamma_{\alpha s, 4}^{(N)}$ u. s. w. .

Wegen der verschiedenen Weinberg-Potenzen für $\Gamma^{(N)}$ und $\Delta_{\alpha, 4} \Gamma^{(N)}$ kann $\Gamma_{\alpha s, 0}^{(N)}$ keine Funktion der Massenbrechung sein.

Als Lösungen der Gleichungen (50) und (54) erhält man:

$$\Gamma_{\alpha s, 1}^{(N)}(i p_1, m^2, g) = \Phi_{1 p_1} \int \ln m^2 - \int_{g_0}^g dg' \frac{1}{\beta(g')} \} \exp \left\{ N \int_{g_0}^g dg' \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} \right\} \quad (52)$$

$$\Gamma_{\alpha s, 2}^{(N)}(i p_1, m^2, \delta m^2, g) = - \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\lambda'^2}{\lambda'^2} h_{1 p_1, \delta m^2}(\lambda'^2, \hat{g}(\frac{\lambda'}{m})) \exp \left\{ N \int_{\hat{g}(\frac{\lambda'}{m})}^g dg' \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} \right\} \quad (53)$$

mit

$$\hat{g}(\frac{\lambda'}{m}) = g^{-1}(g(g) - \ln m^2 + \ln \lambda'^2)$$

und

$$g(g) = \int_{g_0}^g dg' \frac{1}{\beta(g')}$$

wobei $h_{1 p_1, \delta m^2}$ die Inhomogenität von Gleichung (51) und $\Phi_{1 p_1}$ eine beliebige Funktion ist.

Die Lösung (53) enthält die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. nicht mehr, da diese ja $\Gamma_{\alpha s, 0}^{(N)}$ ist. An (53) erkennt man, daß $\Gamma_{\alpha s, 2}^{(N)}$ über die Inhomogenität eine Funktion von δm^2 ist, was für $\Gamma_{\alpha s, 0}^{(N)}$ nicht der Fall ist. Um diese Abhängigkeit genauer zu sehen, sollen nun $(\Delta_0 \Gamma^{(N)})_{\alpha s, 0}$ und $(\Delta_4 \Gamma^{(N)})_{\alpha s, 0}$ als Funktionen von δm^2 untersucht werden. Das geschieht mit Hilfe der CS-Gleichungen (44) und (45) .

Wegen (33) kann man (44) auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \{m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma(N-2) - \frac{m^2 \alpha_s}{1+m^2 \alpha_s}\} \Delta_0 \Gamma^{(N)}(\{p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \\ = \{\epsilon m^2 \Delta_0 + \alpha \Delta_\psi\} \Delta_0 \Gamma^{(N)}(\{p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \end{aligned} \quad (54)$$

Obwohl rechts Vertexfunktionen mit zwei weichen Einsetzungen auftreten, ist das asymptotische Verhalten der rechten Seite keineswegs besser als das der linken; die Weinberg-Potenz ist in beiden Fällen $2-N$. Um eine Differentialgleichung für den führenden Term von $\Delta_0 \Gamma^{(N)}$ zu gewinnen, muß man die führenden Terme von $\Delta_0^2 \Gamma^{(N)}$ und $\Delta_\psi \Delta_0 \Gamma^{(N)}$ bestimmen. Das geschieht, indem man für die "äußeren Beine" von $\Delta_0^2 \Gamma^{(N)}$ und $\Delta_\psi \Delta_0 \Gamma^{(N)}$ Operatorproduktentwicklungen ansetzt ^{25) 26)}.

Um diese Entwicklungen herzuleiten, betrachtet man zunächst die Einteilchen-irreduziblen Zwei-Punkt-Greensfunktionen mit zwei Einsetzungen. Dabei ergibt sich folgende Identität

$$\begin{aligned} \langle T \Delta_0 \Delta_i \tilde{A}_j(p_i) \tilde{A}_j(-p_i) \rangle \quad (i=0, \psi; j=1, 2) \\ = \langle T \Delta_0 \Delta_i N_0 [\tilde{A}_j(p_i) \tilde{A}_j(-p_i)] \rangle \end{aligned} \quad (55)$$

Setzt man für $N_0 [\tilde{A}_j(p_i) \tilde{A}_j(-p_i)]$ die hergeleiteten Normalproduktentwicklungen an, so folgt:

$$\begin{aligned} \langle T \Delta_0 \Delta_i N_0 [\tilde{A}_j(p_i) \tilde{A}_j(-p_i)] \rangle &= \langle T \Delta_0 \Delta_i N_2 [\tilde{A}_j(p_i) \tilde{A}_j(-p_i)] \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \{ \langle T N_0 [\tilde{A}_j(p_i) \tilde{A}_j(-p_i)] \tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0) \rangle_{\delta m^2, g}^{P_i} \times \\ &\times \langle T N_2 [\tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0)] \Delta_0 \Delta_i \rangle \} \end{aligned} \quad (56)$$

Für große λp_1 und $\lambda \rightarrow \infty$, p_1 fest fällt per Konstruktion der erste Term der rechten Seite um zwei Potenzen stärker ab als die linke Seite. Führt man daher in (56) die Amputation der äußeren Beine aus und setzt den Rest in (54) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & \left\{ m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \frac{m^2 \alpha_g}{1+m^2 \alpha_2} \right\} (\Delta_0 \Gamma^{(2)(j,j)})_{as,0}(\{p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon m^2 \sum_{k=1}^2 \{ \langle T \hat{N}_0 [\tilde{A}_j(p_1) \tilde{A}_j(-p_1)] \tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0) \rangle_{\delta m^2, 0}^{P'} \times \\ & \quad \times \langle T N_2 [\tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0)] \Delta_0 \Delta_0 \rangle \} \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon m^2 \sum_{k=1}^2 \{ \langle T \hat{N}_0 [\tilde{A}_j(p_1) \tilde{A}_j(-p_1)] \tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0) \rangle_{\delta m^2, 0}^{P'} \times \\ & \quad \times \langle T N_2 [\tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0)] \Delta_0 \Delta_4 \rangle \} \end{aligned} \quad (57)$$

Dabei bedeutet $\Gamma^{(2)(j,j)}$ die Zweipunkt-Vertexfunktion mit zwei äußeren Beinen vom Typ A_j ($j = 1, 2$); $\hat{N}_0$ bedeutet, daß auch die "Beine" im Normalprodukt "amputiert" sind.

Auf gleiche Weise erhält man aus (45):

$$\begin{aligned} & \left\{ m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \frac{m^2 \alpha_6}{1+m^2 \alpha_2} \right\} (\Delta_4 \Gamma^{(2)(j,j)})_{as,0}(\{p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \\ &= -\varepsilon m^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_0} (\Delta_0 \Gamma^{(2)(j,j)})_{as,0}(\{p_i\}, m^2, \delta m^2, g) \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon m^2 \sum_{k=1}^2 \{ \langle T \hat{N}_0 [\tilde{A}_j(p_1) \tilde{A}_j(-p_1)] \tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0) \rangle_{\delta m^2, 0}^{P'} \times \\ & \quad \times \langle T N_2 [\tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0)] \Delta_0 \Delta_4 \rangle \} \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon m^2 \sum_{k=1}^2 \{ \langle T \hat{N}_0 [\tilde{A}_j(p_1) \tilde{A}_j(-p_1)] \tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0) \rangle_{\delta m^2, 0}^{P'} \times \\ & \quad \times \langle T N_2 [\tilde{A}_k(0) \tilde{A}_k(0)] \Delta_4 \Delta_4 \rangle \} \end{aligned} \quad (58)$$

Man erkennt an den Inhomogenitäten der Gleichungen (57) und (58), daß weder $(\Delta_0 \Gamma^{(2)}(j, j))_{as, 0}$ noch $(\Delta_4 \Gamma^{(2)}(j, j))_{as, 0}$ in einfacher Weise von der Massenbrechung δm^2 abhängen. Da diese Funktionen jedoch die Inhomogenitäten der Dgl. für $\Gamma_{as, 2}^{(2)}$ bilden (siehe (51) und (53)) hängt auch $\Gamma_{as, 2}^{(2)}$ nicht in einfacher Weise - etwa in Form einer Potenz von δm^2 als Faktor - ab. Andererseits jedoch sieht man an (57) und (58), daß die Impuls- und damit die λ -Abhängigkeit durch Greensfunktionen der symmetrischen Theorie gegeben ist. Die δm^2 -abhängigen Terme treten als bezüglich $\{p_1\}$ konstante Faktoren auf. Das bedeutet, daß die Anzahl und Höhe der in $\Gamma_{as, 2}^{(2)}$ auftretenden logarithmischen Korrekturen zum Weinberg-Verhalten durch die symmetrische Theorie gegeben sind.

6. Kapitel: Äquivalenz von weicher und harter Quantisierung

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, ist das vorliegende Modell schon einmal ¹⁴⁾ im üblichen - harten - BPHZ Formalismus behandelt worden. Dabei wurde $\delta m^2 A_2^2$ als Teil der freien Lagrangedichte behandelt und die asymptotische Invarianz durch Addition zusätzlicher, symmetriebrechender Terme zur Lagrangedichte erzwungen. Im weiteren soll nun gezeigt werden, daß man - ausgehend vom LZ-quantisierten Modell - ein hart quantisiertes konstruierten kann, welches

- 1) dieselben Greensfunktionen liefert
- 2) nur N_4 - Normalprodukte enthält

Daß die Konstruktion eines solchen harten Modells grundsätzlich möglich ist, folgt aus einem Äquivalenztheorem von Rouet ¹⁶⁾, welches - angewandt auf das vorliegende Problem - folgendes aussagt:
Betrachtet man ein Modell

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha) = & \mathcal{L}_{\text{eff}} + \frac{\alpha}{2} \delta m^2 \{ N_4 [s^2 A_2^2](x) - N_4 [A_2^2](x) \} \\ & - \sum_i \delta m^2 r_i(\alpha) N_4 [O_i](x) \end{aligned} \quad (59)$$

so kann man für alle Werte des Parameters α Koeffizienten $r_i(\alpha)$ und lokale Operatoren $O_i(x)$ finden, so daß die Greensfunktionen des ursprünglichen Modells $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ und des neuen $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)$ übereinstimmen.

Die Tayloroperatoren wirken bei der Konstruktion von Greensfunktionen auf die äußeren Impulse von Renormierungsteilen und auf den "soft parameter" s ; der weiche Parameter δm der vorangehenden Kapitel ist hier aus beweistechnischen Gründen durch " s " ersetzt worden. Dementsprechend sind die physikalischen Greensfunktionen

durch den Wert $s=1$ gegeben, d.h. nach der Renormierung eines Graphen wird s überall gleich eins gesetzt.

Betrachtet man nun die Greensfunktionen zu $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)$ bei $\alpha = 1$, so fallen alle weich-quantisierten Terme heraus, und man behält Greensfunktionen zu einer hart-quantisierten Theorie, welche nur N_4 -Operatoren enthält.

Die Bedingung dafür, daß die Greensfunktionen bezüglich $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)$ nicht von α abhängen, lautet

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \langle TX \rangle_{\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)} = 0 \quad (60)$$

Andererseits erhält man durch direktes Differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle TX \rangle_{\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)} &= i \delta m^2 \int d^4x \langle T (N_2[A_2^2](x) - N_4[A_2^2](x)) X \rangle \\ &\quad - i \delta m^2 \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial \alpha} \int d^4x \langle T N_4[O_i](x) X \rangle_{\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)}, \end{aligned} \quad (61)$$

Also muß gelten:

$$\int d^4x \langle T (N_2[A_2^2](x) - N_4[A_2^2](x)) X \rangle_{\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)} = \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial \alpha} \int d^4x \langle T N_4[O_i](x) X \rangle_{\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)} \quad (62)$$

Benutzt man eine Zimmermann-Identität der Form

$$\int d^4x \langle T (N_2[A_2^2](x) - N_4[A_2^2](x)) X \rangle_{\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)} = \sum_i h_i(\alpha) \int d^4x \langle T N_4[O_i](x) X \rangle_{\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)} \quad (63)$$

so folgt - unter Ausnutzung der linearen Unabhängigkeit der $N_4 [O_j](x)$ - :

$$f_j(\alpha) = \frac{\partial r_j(\alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{für alle } j \quad (64)$$

Das sind Differentialgleichungen für die $r_j(\alpha)$. Sie sollen mit der Anfangsbedingung $r_j(0) = 0$ gelöst werden. Diese Anfangsbedingung stellt wegen der α -Unabhängigkeit der Greensfunktionen sicher, daß diese für $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)$ und $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ für alle α übereinstimmen. Das obige gekoppelte System von Differentialgleichungen kann im Prinzip in jeder Ordnung der Störungstheorie gelöst werden und führt zu formalen Potenzreihen in g für alle $r_j(\alpha)$.

Fordert man von der zu konstruierenden Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha)$ Invarianz unter der Ersetzung $A_1 \rightarrow -A_1$, $A_2 \rightarrow -A_2$, so erhält man die folgende allgemeine Lösung:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\alpha) = \mathcal{L}_{\text{sym}} - \frac{1}{2}(1-\alpha) \delta m^2 N_2[A_2^2] - \frac{1}{2}\alpha \delta m^2 N_4[A_2^2] \quad (65)$$

$$- \delta m^2 \left\{ \sum_{i=1}^3 r_i(\alpha) N_4[\partial^\mu A_i \partial_\mu A_i] \right.$$

$$+ r_3(\alpha) N_4[A_1^4] + r_4(\alpha) N_4[A_2^4]$$

$$\left. + r_5(\alpha) N_4[A_1^2 A_2^2] + r_6(\alpha) N_4[A_1^2] + r_7(\alpha) N_4[A_2^2] \right\}$$

Diese Lagrangedichte stimmt für $\alpha = 1$ mit einer überein, die nur N_4 -Operatoren enthält und zu hart-quantisierten Greensfunktionen führt. Wegen der Gleichheit der Greensfunktionen für $\mathcal{L}_{\text{eff}}(0)$ und $\mathcal{L}_{\text{eff}}(1)$ ist somit die Äquivalenz von weicher und harter Quantisierung nachgewiesen.

7. Kapitel: Zusammenhang zwischen multiplikativer und BPHZ - Renormierung ²⁷⁾

Bei der Behandlung des Modells im 1. Kapitel wurde ein Renormierungsschema gewählt, welches mit Hilfe der Zimmermannschen Waldformel und endlichen, additiven Countertermen $a, b, c, \delta a$ zu endlichen, auf bestimmte Weise normierten Greens- oder Vertexfunktionen und zu asymptotischer O_2 -Invarianz führte. Hier soll nun der Zusammenhang zwischen diesem Schema und der "üblichen" multiplikativen Renormierung aufgezeigt werden.

Im "üblichen" Schema geht man im symmetrischen Falle von einer Lagrangedichte mit unrenormierten Feldern A_u , Massen m_0 und Kopplungskonstanten g_0 aus und unterteilt die Lagrangefunktion in einen freien (in den Feldern bilinearen) Teil und einen Wechselwirkungsteil:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \hat{A}_u)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 (\hat{A}_u)^2 - \frac{1}{4!} g_0 (\hat{A}_u)^4, \quad \hat{A}_u = \frac{A_u}{A_{2u}} \quad (66)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial \hat{A}_u)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 (\hat{A}_u)^2 \quad (67)$$

$$\mathcal{L}_{int} = - \frac{1}{4!} g_0 (\hat{A}_u)^4$$

Diese Aufteilung in einen freien und einen Wechselwirkungsteil ist willkürlich, jedoch kann man zeigen ²⁸⁾, daß sich auch dann, wenn man einen Teil des bilinearen Terms $-\frac{1}{2} m_0^2 (\hat{A}_u)^2$ zur Wechselwirkung hinzunimmt, via Gell-Mann-Low-Formel dieselben unrenormierten Greensfunktionen ergeben.

Sodann konstruiert man mit Hilfe der Gell-Mann-Low-Formel im Sinne der oben gewählten Unterteilung in freien und Wechselwirkungsanteil Greensfunktionen äußerer Felder.

Um endliche Greensfunktionen zu erhalten, führt man zunächst Cutoffs Λ (oder andere Regularisierungen) ein und renormiert dann A_u und g_0 multiplikativ sowie m_0 additiv durch folgende Ersetzungen:

$$\hat{A} = Z^{-1/2} \hat{A}_u \quad (68)$$

$$g Z_1 = g_0 Z^2 \quad (69)$$

$$m^2 = m_0^2 + \Delta m^2 \quad (70)$$

Dabei sind A , m , g die renormierten Felder, Massen und Kopplungskonstanten und Z , Δm^2 , Z_1 die Renormierungskonstanten der Felder, Massen und Kopplungskonstanten. Führt man die renormierten Größen in die Lagrangefunktion (66) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial \hat{A})^2 - \frac{1}{2} m^2 \hat{A}^2 - \frac{1}{4!} g Z_1 \hat{A}^4 \\ & + \frac{1}{2} (Z-1) \{ (\partial \hat{A})^2 - (m^2 - \Delta m^2) \hat{A}^2 \} + \frac{1}{2} \Delta m^2 \hat{A}^2 \end{aligned} \quad (71)$$

oder in additiver Schreibweise

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (1+b) (\partial \hat{A})^2 - \frac{1}{2} (m^2-a) \hat{A}^2 - \frac{1}{4!} (g-c) \hat{A}^4 \quad (72)$$

In diesen Gleichungen zeigt sich der enge Zusammenhang zwischen multiplikativer (71) und additiver Renormierung (72): Die beiden Sätze

Renormierungskonstanten $Z, Z_1, \Delta m^2$ bzw. a, b, c können alternativ zur Konstruktion von Greensfunktionen benutzt werden. Die entscheidende Aussage der multiplikativen Renormierung ist nun, daß man für renormierbare Theorien $Z, Z_1, \Delta m^2$ bzw. a, b, c als Funktionen des Cutoffs Λ immer so wählen kann, daß im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ die Greensfunktionen zwar endlich bleiben $Z, Z_1, \Delta m^2$ oder a, b, c , jedoch divergieren. Diese Wahl ist jedoch nicht eindeutig. Erst bei zusätzlicher Festlegung gewisser Normierungsbedingungen einzelner Greensfunktionen oder Vertexfunktionen ist diese Eindeutigkeit gewährleistet.

Setzt man diese Normierungsbedingungen in geeigneter Weise an ²⁹⁾, so bestimmen sie die Renormierungskonstanten eindeutig als formale Potenzreihen in der Kopplungskonstanten mit (im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$) unendlichen Koeffizienten. Die Greensfunktionen sind jedoch - auch im Limes - endlich und erfüllen die gewählten Normierungsbedingungen.

Diese Aussage kann man auch so treffen: Sei $G_n^{(N)}(p)$ die renormierte (endliche, cutoff-unabhängige) und richtig normierte N-Punkt-Funktion in n-ter Ordnung Störungstheorie, so gibt es eine "Finite Part" Operation (F.P.) - beispielsweise die Zimmermannsche Waldformel -, so daß gilt:

$$G_n^{(N)}(p) = \text{F.P.} \sum_{G_n} \int I_{G_n}(p, k) dk \quad (74)$$

Dabei sind die G_n Graphen n-ter Ordnung, welche zu $G_n^{(N)}(p)$ beitragen und die $I_{G_n}(p, k)$ die entsprechenden unrenormierten Integranden. Diese werden mit Hilfe der Gell-Mann-Low-Formel und einer effektiven ⁴⁾ Lagrangedichte konstruiert, welche formal ebenso aussieht wie in (72), jedoch nur endliche Counterterme enthält.

Führt man nun - ausgehend von der symmetrischen Theorie - eine Massenbrechung in $\mathcal{L}_0$ ein, so kommt man mit einem zusätzlichen Counterterm der kanonischen Dimension 2 aus ¹¹⁾. Alle übrigen sind dieselben wie in der symmetrischen Theorie, wenn man als Normierungsbedingungen solche der symmetrischen Theorie wählt. Genau diese Aussage ist die Grundlage dafür, daß im Rahmen der multiplikativen Renormierung Massenbrechungen als weiche Symmetriebrechung behandelt werden können.

8. Kapitel: Normalprodukt -NP- Entwicklungen in einem massiven vollständig weich-quantisierten Modell

In der bisherigen Untersuchung wurde immer vorausgesetzt, daß die physikalische Masse m der Felder ungleich Null ist. Wollte man in den renormierten Greensfunktionen zum $m = 0$ -Limes übergehen, so würden in den Subtraktionstermen nur Propagatoren auftreten, welche weder eine Masse noch äußere Impulse enthalten. Die jeweils höchsten Subtraktionsterme der Zwei- und Vierpunktfunktion würden daher zu Infrarot - (IR) - Divergenzen führen. Aufgrund der notwendigen Ultraviolett - (UV) - Subtraktionen bei gewissen Greensfunktionen sind also im $m = 0$ - Limes die Massenschalennormierungsbedingungen nicht mehr alle erfüllbar ("b" und "c" divergieren). Um die auftretenden Divergenzen zu verhindern, ist man gezwungen, mindestens einen weiteren masseartigen Parameter " μ " einzuführen und andere - off-shell - Normierungsbedingungen zu fordern. Das bedeutet, daß man die Theorie nicht mehr physikalisch (i. e. durch die Teilchenmasse) parametrisieren kann, wenn man am $m = 0$ -Limes interessiert ist.

Die bekanntesten im $m = 0$ -Limes IR-endlichen Parametrisierungen sind:

A. Die Gell-Mann-Low-Parametrisierung ³⁰⁾

$$\Gamma^{(2)}(p, p) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = -i m^2$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)}(p, p) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = \quad (75)$$

$$\Gamma^{(4)}(p_1, p_1, p_3) \Big|_{p_1^2 = p_3^2 = -\mu^2} = -ig$$

B. Die Kadanoff-Parametrisierung

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(1)}(p) \Big|_{m=0} &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)}(p^2) \Big|_{p=0, m=0} &= i \\
 \frac{\partial}{\partial m^2} \Gamma^{(2)}(p^2) \Big|_{p=0, m=0} &= -i \\
 \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3) \Big|_{m=0} &= 2\gamma
 \end{aligned} \tag{76}$$

Die Kadanoff-Parametrisierung hat gegenüber derjenigen von Gell-Mann und Low folgenden Vorteil:

Bereits die Vertexfunktionen der massiven Theorie erfüllen eine homogene parametrische Differentialgleichung³¹⁾ vom Typ

$$\left\{ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + 2 \delta m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - N_\gamma \right\} \Gamma^{(N)} = 0 \tag{77}$$

wobei die Funktionen β, γ, δ nur von der Kopplungskonstanten g abhängen. Damit diese Gleichung gilt, muß die Ableitung nach der Masse m eine weiche Einsetzung sein:

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \Gamma^{(N)} \sim \int dx N_2[A^2](x) \Gamma^{(N)} \tag{78}$$

Aus (77) und (78) folgt - zusammen mit dem Weinberg-Power-Counting-Theorem⁵⁾, daß für euklidische, nichtexzeptionelle, äußere Impulse die präasymptotischen Vertexfunktionen der massiven Theorie mit den Vertexfunktionen der masselosen Theorie übereinstimmen ohne die Notwendigkeit einer Uparametrisierung wie bei Symanzik²⁴⁾. Der - im Sinne kurzer Abstände - führende Term der Vertexfunktionen

der massiven Theorie ist also der $m = 0$ -Limes der massiven Vertexfunktionen.

Um Gleichung (78) herleiten zu können, muß jedoch die gesamte Masse m als weicher Parameter behandelt werden. Das führt bereits in der massiven Theorie bei gewissen Subtraktionstermen zu IR-Divergenzen. Diese können jedoch dadurch beseitigt werden, daß man in den entsprechenden Termen eine Hilfsmasse - etwa das " μ " - aus den Normierungsbedingungen (75), (76) - an Stelle der Masse m einführt und so massive Propagatoren erhält.

Um das Verfahren näher zu erläutern, soll folgendes Modell betrachtet werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu A \partial^\mu A - \frac{1}{2} m^2(s, \sigma) A^2 - \frac{1}{4!} g A^4 \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= - \frac{1}{4!} g A^4\end{aligned}\quad (79)$$

Dabei ist

$$m^2(s, \sigma) = s^2 m^2 + \sigma^2 \mu^2 \quad (80)$$

s und σ sind zwei weiche Parameter. Die Konstruktion von Greens- oder Vertexfunktionen geschieht mit Hilfe der Gell-Mann-Low-Formel, der Zimmermannschen Waldformel und folgenden Subtraktionsoperatoren:

$$\tau^{(0)} = t_{p s \sigma}^{(0)} \quad \text{für die Vierpunktfunktion} \quad (81)$$

$$(1 - \tau^{(2)}) = (1 - t_{p s \sigma}^{(0)}) (1 - t_{p \cdot \sigma - 1}^{(2)})$$

für die Zweipunktfunktion.

Die Tayloroperatoren $t_{x_1 x_2 x_3}^{(d)}$ erzeugen für jeden Satz reeller Variablen x_1, x_2, x_3 und $d < 0$ eine Taylorreihe um $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ bis zum Grade d und Null für $d < 0$.

Aus der Form (81) ergibt sich, daß nicht in allen Subtraktions-terminen der Zweipunktfunktion die Masse μ eingeführt wird, sondern nur dort, wo es unbedingt notwendig ist, um IR-Divergenzen zu vermeiden; nämlich in den Termen, in denen zweite Ableitungen nach p , ϵ oder s vorkommen. Die Zweipunkt- und Vierpunktfunktionen werden also minimal infrarot-subtrahiert.

Nach allen Subtraktionen werden $\epsilon = 0$ und $s = 1$ gesetzt, um zu den physikalischen Greensfunktionen zu gelangen. Die so konstruierten massiven Greensfunktionen erfüllen ohne Counterterme die Normierungsbedingungen (76), die Differentialgleichung (77) und besitzen einen endlichen Limes für $m \rightarrow 0$. Ferner gilt, da der gesamte Massenterm $s^2 m^2 A^2$ weich quantisiert ist, die "softness-Bedingung" (78). Die Vertexfunktionen werden also für große, euklidische, nichtexzeptionelle, äußere Impulse asymptotisch massenunabhängig. Daher ergibt sich die Frage: Beziehen sich die Koeffizienten von Normalproduktentwicklungen im Rahmen eines so konstruierten massiven Modells bereits auf die masselose Theorie? Um das beantworten zu können, müssen zunächst Normalprodukte eingeführt werden.

Sei $Q_1(x)$ ein formales Produkt des elementaren Feldes $A(x)$ dessen Ableitungen sowie Faktoren s^{c_1} und $(\epsilon-1)^{c_2}$, $c_1, c_2 \geq 0$ ganz. Man definiert die Dimension $d[Q_1]$ eines solchen Produkts durch

$$d[Q_1] = \text{kanonische Dimension von } Q_1 + c_1 + c_2 \quad (82)$$

und gemischte Normalprodukte $N_{\delta_i}^{q_i} [Q_1] (x)$ mit Infrarotindex q_i

$$0 \leq q_i = d[Q_i] - n_1 \quad (83)$$

und Ultraviolettindex δ_i

$$\delta_i = d[Q_i] + n_2 \quad (84)$$

wobei $n_1, n_2 \geq 0$, ganz.

Die verbundenen Greens- und Vertexfunktionen solcher zusammengesetzten Felder sind wie bei Zimmermann ⁴⁾ definiert, jedoch mit folgenden Subtraktionsoperatoren $\tau_{\delta(y)}^{q(y)}$

$$(1 - \tau_{\delta(y)}^{q(y)}) = (1 - t_{p_T s_T \sigma_T^{-1}}^{q(y)-1}) (1 - t_{p_T s_T \sigma_T}^{\delta(y)}) \quad (85)$$

wobei gilt

$$q(y) = 4 - N_y - \sum_{v_i \in y} (4 - q_i)$$

$$\delta(y) = 4 - N_y - \sum_{v_i \in y} (4 - \delta_i)$$

$$q(y) \leq \delta(y)$$

und N_y = Anzahl der äußeren Beine von y .

Nach allen Subtraktionen werden $s = 1$ und $\sigma = 0$ gesetzt, d.h. auch die physikalischen Greens- bzw. Vertexfunktionen zusammengesetzter Felder sind durch dieses Wertepaar gegeben.

Diese Definitionen für gemischte Normalprodukte sind vollständig analog zu denjenigen, welche Lowenstein ³²⁾ kürzlich im Zusammenhang mit einer $m = 0$ -Theorie benutzt hat. Dementsprechend sind die

so konstruierten Operatoren IR - endlich ³³⁾.

Die Möglichkeit der Wahl des Infrarotindex eines Normalproduktes bedeutet, daß man minimal IR - subtrahierte und auch IR - über-subtrahierte Normalprodukte betrachten kann. Dabei ist ein Normalprodukt minimal IR - subtrahiert, wenn man entsprechend dem Q_1 das maximale q wählt. Daher existieren auch lokale und bilokale Zimmermann-Identitäten (Normalproduktentwicklungen), welche Operatoren mit verschiedenem IR-Index oder UV-Index zueinander in Beziehung setzen.

Auch in diesem Quantisierungsschema stimmt auf Graphen vom Typ $\mathcal{A}_1$ (siehe Kapitel 3) das verallgemeinerte Wickprodukt mit dem Normalprodukt mit UV-Index Null überein. Da jedoch der IR-Index immer kleiner oder gleich dem UV-Index ist, sollen zunächst Entwicklungen vom Typ $N_0^\circ(x_1, x_2) \sim N_x^\circ(x_1, x_2)$ mit $\chi \geq 0$ hergeleitet werden. Man erhält (vergleiche Formel (21)) für $\chi \geq \omega$ und $\Delta \in \mathcal{B}_1$

$$R_{\chi\Delta}^\circ \cdot R_{\omega\omega}^\circ \cdot S_\Delta \sum_{\ell \in T^\chi} \sum_{\gamma \in U_\ell} \sum_{\substack{U_1 \in U_\ell \\ U_2 \in U_\ell}} \prod_{j \in U_1} (-\tau_\chi^{\circ\gamma} S_j) [- (\tau_\chi^{\circ\ell} - \tau_\omega^{\circ\ell}) S_\ell] \prod_{j \in U_2} (-\tau_\omega^{\circ\gamma} S_j) I_\Delta \quad (86)$$

Für den Operator $- (\tau_\chi^{\circ\ell} - \tau_\omega^{\circ\ell})$ gilt

$$- (\tau_\chi^{\circ\ell} - \tau_\omega^{\circ\ell}) = - (t_{p_\ell s_\ell \in \ell^{-1}}^{\chi(\ell)} - t_{p_\ell s_\ell \in \ell^{-1}}^{\omega(\ell)}) \quad (87)$$

da für alle Renormierungsteile ℓ mit r äußeren Beinen und $v_0 \in \ell$ gilt: $q(\ell) = 4 - r - (4 - 0) = -r < 0$.

Daher ergeben sich zu (22) und (23) analoge Gleichungen:

$$\tau_{\omega}^{\alpha\ell} - \tau_{\omega}^{\alpha\ell} = \sum_{\{\hat{q}, \hat{e}, \hat{\tau}\} = \omega} \frac{1}{\hat{\tau}! \hat{e}! \prod_{j=1}^{\hat{\tau}} (\#(\hat{q})_j)!} p_{1(\hat{q})_1}^{\ell} \cdots p_{\tau(\hat{q})_{\tau}}^{\ell} (\sigma_{\ell}-1)^{\hat{\tau}} (s_{\ell})^{\hat{e}} \theta_{\{p_{\ell}, s_{\ell}, \omega_{\ell}\}}^{\ell} \partial_{p_{\ell}}^{(\hat{q})_1} \cdots \partial_{p_{\ell}}^{(\hat{q})_{\tau}} \quad (88)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle \text{TN}_{\omega}^{\circ} [A(x_1) A(x_2)] \tilde{X} \rangle_{\Gamma} \\ = \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle \text{TN}_{\chi}^{\circ} [A(x_1) A(x_2)] \tilde{X} \rangle_{\Gamma} \end{aligned} \quad (89)$$

$$+ \sum_{\{\hat{q}, \hat{e}, \hat{\tau}\} = \omega} \left\{ \frac{(-1)^{\hat{\tau}} \prod_{j=1}^{\hat{\tau}} (\#(\hat{q})_j)!}{\hat{e}! \hat{\tau}! \prod_{j=1}^{\hat{\tau}} (\#(\hat{q})_j)!} G^{(\omega, 0)\{\hat{q}, \hat{e}, \hat{\tau}\}}(\chi) \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_{\chi N}} \langle \text{TN}_{\chi}^{\circ} [(\sigma-1)^{\hat{\tau}} s^{\hat{e}} A^{(\hat{q})_1} \cdots A^{(\hat{q})_{\tau}}](x) \tilde{X} \rangle_{\Delta} \right\}$$

wo

$$G^{(\omega, 0)\{\hat{q}, \hat{e}, \hat{\tau}\}} = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{2\tau}} \frac{\partial^{\hat{\tau}}}{\partial(\sigma^{\tau})^{\hat{\tau}}} \frac{\partial^{\hat{e}}}{\partial(s^{\tau})^{\hat{e}}} \langle \text{TN}_{\omega}^{\circ} [A(\xi) A(-\xi)] \tilde{A}^{(\hat{q})_1}(0) \cdots \tilde{A}^{(\hat{q})_{\tau}}(0) \rangle_{\tau} \Big|_{\substack{s^{\tau} = 0 \\ \hat{e}^{\tau} = 1}}$$

Für die Summe gilt

$$\omega < \sum_{j=1}^{\tau} \#(\hat{q})_j + \tau + \hat{e} + \hat{\tau} \leq \chi \quad (90)$$

Für die Dimension der Vertizes

$$N_{\chi}^{\circ} [Q(x)] = N_{\chi}^{\circ} [(\sigma-1)^{\hat{\tau}} s^{\hat{e}} A^{(\hat{q})_1} \cdots A^{(\hat{q})_{\tau}}](x)$$

gilt

$$d[Q] = \sum_{j=1}^{\tau} \#(\hat{q})_j + \tau + \hat{e} + \hat{\tau} \quad (91)$$

Wählt man daher in der Entwicklung (89) speziell $\chi = \omega + 1$, so treten wegen (90) nur minimal UV- und maximal IR-subtrahierte Operatoren auf. Beginnt man - analog zu Kapitel 3 - mit $\omega = 0$ und

löst das sich ergebende Rekursionsproblem, so erhält man die gesuchte NP-Entwicklung:

$$\begin{aligned} \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle \text{TN}_0^\circ [A(x_1) A(x_2)] \tilde{X} \rangle_\Gamma \\ = \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}_1} \langle \text{TN}_\chi^\circ [A(x_1) A(x_2)] \tilde{X} \rangle_\Gamma \quad (92) \\ + \sum_{\{\hat{q}, \hat{e}, \hat{e}^* = 0\}}^{\chi} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^r \#(\hat{e}_j) G(\hat{e}, \hat{e}^*, \hat{e}^*, \chi)}{\hat{e}! \hat{e}^*! \prod_{j=1}^r \#(\hat{q}_j)!} \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_{rN}^+} \frac{\langle \text{TN}_\chi^\circ [(\hat{e}-1) \hat{e} \hat{e}^* A(\hat{q})_{\chi-\Delta}(\hat{q})_{\hat{e}^*}] (x) \tilde{X} \rangle_\Delta}{r!} \right\} \end{aligned}$$

wobei

$$G(\hat{q}, \hat{e}, \hat{e}^*)(\chi) = G^{(\omega, 0)}(\hat{q}, \hat{e}, \hat{e}^*)(\chi)$$

mit

$$\omega = \sum_{j=1}^r \#(\hat{q}_j) + r + \hat{e} + \hat{e}^* - 1$$

und

$$N[Q](x) = N_{\alpha[Q]}^\circ [Q](x)$$

ist.

Beispiele: ($\Gamma \in \mathcal{A}_1$)

$$\langle \text{TN}_0^\circ [A(x_1) A(x_2)] \tilde{X} \rangle = \langle \text{TN}_2^\circ [A(x_1) A(x_2)] \tilde{X} \rangle \quad (1)$$

$$+ \langle \text{TN}_0^\circ [A(\xi) A(-\xi)] \tilde{A}(0) \tilde{A}(0) \rangle^P \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi^*=0}} \times$$

$$\times \frac{1}{2!} \langle \text{TN}_2^\circ [A^2](x) \tilde{X} \rangle$$

$$\langle \text{TN}_3^\circ [A(x_1) A(x_2)] \tilde{X} \rangle = \langle \text{TN}_5^\circ [A(x_1) A(x_2)] \tilde{X} \rangle \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \langle \text{TN}_3^\circ [A(\xi) A(-\xi)] \tilde{A}(0) \tilde{A}(0) \rangle^P \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi^*=0}} \times$$

$$\times \frac{1}{2!} \langle \text{TN}_5^\circ [\xi^2 A^2](x) \tilde{X} \rangle$$

+ ...

$$\begin{aligned}
 & \dots + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \langle T N_3^0 [A(\xi) A(-\xi)] \tilde{\Gamma}^{(N)}(0) \rangle \Big|_{s=0}^{s=1} \times \\
 & \times \frac{1}{2!} \langle T N_4^0 [(\sigma-1)^2 A^2](x) \tilde{X} \rangle \\
 & + \frac{(-i)^2}{2!} \langle T N_3^0 [A(\xi) A(-\xi)] \partial^\mu \partial^\nu \tilde{A}(0) \tilde{A}(0) \rangle \Big|_{s=0}^{s=1} \times \\
 & \times \langle T N_4^0 [\partial_\mu \partial_\nu A](x) \tilde{X} \rangle \\
 & + (-i)^2 \langle T N_3^0 [A(\xi) A(-\xi)] \partial^\mu \tilde{A}(0) \partial^\nu \tilde{A}(0) \rangle \Big|_{s=0}^{s=1} \times \\
 & \times \frac{1}{2!} \langle T N_4^0 [\partial_\mu A \partial_\nu A](x) \tilde{X} \rangle \\
 & + \langle T N_3^0 [A(\xi) A(-\xi)] \tilde{A}^*(0) \rangle \Big|_{s=0}^{s=1} \times \\
 & \times \frac{1}{4!} \langle T N_4^0 [A^4](x) \tilde{X} \rangle
 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (89) und den Beispielen kann man entnehmen, daß in sämtlichen Koeffizienten der NP-Entwicklung der weiche Parameter s gleich Null gesetzt wird. Daher enthalten nur diejenigen Koeffizienten, welche Ableitungen von Vertexfunktionen nach s^2 sind, die Masse m . Jedoch ist diese Abhängigkeit wegen

$$\frac{\partial}{\partial s^2} \Gamma^{(N)} \sim m^2 \int dx N_2^2 [A^2](x) \Gamma^{(N)} \quad (93)$$

besonders einfach: m^2 oder Potenzen davon stehen als Faktoren vor m -unabhängigen Koeffizienten. Daher liegt es nahe, diese Massenpotenzen in die Vertizes $N_\chi^0 [(\sigma-1)^2 s^2 A^{(\hat{q})_1} \dots A^{(\hat{q})_r}](x)$ hineinzudefinieren.

Damit ist es also gelungen, im Rahmen eines massiven Kadanoff-parametrisierten Modells NP-Entwicklungen herzuleiten, deren Koeffizienten nicht von der Masse abhängen und von denen die meisten bereits genau diejenigen der $m = 0$ Theorie sind.

Diese Aussage bleibt auch dann richtig, wenn man - ausgehend von (89) - den IR-Index der Normalprodukte ändert: Die zusätzlichen Koeffizienten werden ebenfalls bei $s = 0$ bestimmt, so daß sich entweder keine oder eine triviale Abhängigkeit von " m " ergibt.

Anhang

Um die Bwgl. (11)' und (12)' zu beweisen, wird

$$\langle T N_4 [A_2(x) K_x A_1(x)] A_2(x) A_4(x) \rangle = \langle T N_4 [A_2(x) (\partial_x + m^2 \cdot A_4(x)) A_2(x) A_4(x)] \rangle$$

in 1. Ordnung Störungstheorie in g untersucht. Dabei werden weder die zusammengesetzten Felder noch die Wechselwirkungen wickgeordnet.

1. Kopplung. (——— = $\hat{A}_1$ -Propagator, --- $\hat{A}_2$ -Propagator, $K_x = \text{ // })$

$$i \int d\gamma \langle T \hat{A}_2(x) K_x \hat{A}_4(x) \{ -\frac{g-c}{4!} [\hat{A}_4^*(\gamma) + 2 \hat{A}_1^2(\gamma) \hat{A}_2^*(\gamma) + \hat{A}_2^*(\gamma)] \} \hat{A}_2(x_2) \hat{A}_4(x_4) \rangle$$

$$= i \int d\gamma \left\{ \frac{g-c}{4!} 4 \cdot 3 \cdot \text{diagram 1} + 2 \frac{g-c}{4!} 2 \cdot 2 \cdot \text{diagram 2} + 2 \frac{g-c}{4!} 2 \cdot \text{diagram 3} + \frac{g-c}{4!} 4 \cdot 3 \cdot \text{diagram 4} \right\}$$

$$= -3 \frac{g-c}{3!} \cdot \text{diagram 5} - 3 \frac{g-c}{3!} \cdot \text{diagram 6} - 2 \delta(x-x_4) \frac{g-c}{4!} 4 \cdot 3 \cdot (-i) \int d\gamma \text{diagram 7}$$

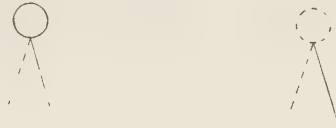
$$= -\frac{g-c}{3!} \langle T N_4 [A_1^3(x) A_2(x)] A_2(x_2) A_4(x_4) \rangle$$

$$- \frac{g-c}{3!} \langle T N_4 [A_1(x) A_2^3(x)] A_2(x_2) A_4(x_4) \rangle$$

$$- 2 \delta(x-x_4) \langle T A_2(x_2) A_4(x_4) \rangle$$

in erster Ordnung in g

Im üblichen BPHZ-Schema verschwinden Beiträge vom Typ



Im LZ-Schema ist das jedoch nicht der Fall. Um sie als Beiträge zu $\langle TN_+ [A_1^3(x) A_2(x)] A_2(x_2) A_1(x_1) \rangle$ bzw. $\langle TN_+ [A_1(x) A_2^3(x)] A_2(x_2) A_1(x_1) \rangle$ identifizieren zu können, dürfen die zusammengesetzten Operatoren in der Gell Mann-Low-Formel nicht wickgeordnet werden. Andererseits muß es auch Beiträge vom Typ



geben, um die "richtige" Kombinatorik zu erhalten, d.h. auch die Wechselwirkungen dürfen nicht wickgeordnet sein.

2. Kopplung

$$i \int dy \langle T \hat{A}_2(x) K_x \hat{A}_1(x) \{ \frac{1}{2} a \hat{A}_1^2 + \frac{1}{2} a \hat{A}_2^2 + \frac{1}{2} \delta a \delta m^2 \hat{A}_2^2 \} (y) \hat{A}_2(x_2) \hat{A}_1(x_1) \rangle$$

$$= i \int dy \left\{ \frac{1}{2} a \cdot 2 \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} a \cdot 2 \text{ (diagram)} + \delta a \delta m^2 \text{ (diagram)} \right\}$$

$$= a \text{ (diagram)} - a \delta(x-x_1) i \int dy \text{ (diagram)} - i \delta(x-x_1) \delta a \delta m^2 i \int dy \text{ (diagram)}$$

$$= a \langle T N_4 [A_1(x) A_2(x)] A_2(x_2) A_1(x_1) \rangle - i \delta(x-x_1) \langle T A_2(x_2) A_2(x_1) \rangle \left. \vphantom{\int} \right\} \text{ in erster Ordnung in } g$$

3. Kopplung

$$i \int dy \langle T \hat{A}_2(x) K_x \hat{A}_1(x) \{ \frac{1}{2} \ell \partial^\mu \hat{A}_1 \partial_\mu \hat{A}_1 + \frac{1}{2} \ell \partial^\mu \hat{A}_2 \partial_\mu \hat{A}_2 \} (y) \hat{A}_2(x_2) \hat{A}_1(x_1) \rangle$$

$$= i \int dy \left\{ \ell \text{ (diagram)} + \ell \text{ (diagram)} \right\}$$

$$= -i \delta(x_1-x) \langle T A_2(x_2) A_2(x_1) \rangle - \ell \langle T N_4 [A_2(x) \partial_\mu^2 A_1(x)] A_2(x_2) A_1(x_1) \rangle \left. \vphantom{\int} \right\} \text{ in erster Ordnung in } g$$

Durch Aufsummation erhält man

$$\begin{aligned}
 & \langle T N_4 [A_1(x_1) A_1(x_2) A_1(x_3) A_1(x_4)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle \\
 &= -\frac{g-c}{3!} \langle T N_4 [A_1^3(x) A_2(x) + A_1(x) A_2^3(x)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle \\
 &+ a \langle T N_4 [A_1(x) A_2(x)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle \\
 &- b \langle T N_4 [A_2(x) \partial_x^2 A_1(x)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle \\
 &- i \delta(x-x_4) \langle T A_2(x_2) A_2(x_4) \rangle
 \end{aligned}$$

in 1. Ordnung

Falls man die Felder $A_1(x)$ und $A_2(x)$ vertauscht, so gibt es bei der $\delta a \delta m^2$ - Kopplung einen Zusatzterm Z :

$$Z = i \int dy \delta a \delta m^2 \bigtriangleup = \delta a \delta m^2 \langle T N_2 [A_1(x) A_2(x)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
 & \langle T N_4 [A_1(x) (K_x + \delta m^2) A_2(x)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle \\
 &= \frac{g-c}{3!} \langle T N_4 [A_1^3(x) A_2(x) + A_1(x) A_2^3(x)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle \\
 &+ a \langle T N_4 [A_1(x) A_2(x)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle \\
 &+ \delta a \langle T N_4 [\delta m^2 A_1(x) A_2(x)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle \\
 &- b \langle T N_4 [A_1(x) \partial_x^2 A_2(x)] A_2(x_2) A_1(x_4) \rangle \\
 &- i \delta(x-x_2) \langle T A_1(x_2) A_1(x_4) \rangle
 \end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen $(11)'$ und $(12)'$. Obiger Beweis mit zwei äußeren Beinen und erster Ordnung Störungstheorie ist hinreichend für die Gültigkeit der Gleichungen $(11)'$ und $(12)'$, da weitere Strukturen in den Graphen den "Kürzungsvorgang" nicht stören.

Ganz genauso verläuft der Beweis, wenn man Bwgl. der Form $\langle T N_S [\partial_\nu A_2(x) K_\mu A_1(x)] X \rangle$ betrachtet.

LITERATUR:

- 1) B. Schroer: "A Course on Renormalization Theory"
(Cargèse Lectures) F1 -Berlin Preprint, July 1973 .
- 2) F. Jegerlehner: Fortschr. d. Phys. 23 (1975), 71 .
- 3) N.N. Bogoliubov and D.W. Shirkov: "Introduction to the
Theory of Quantized Fields", New York Interscience
Publishers (1959) .
- 4) W. Zimmermann: "Lectures on Elementary Particles
and Quantum Field Theory"; Brandeis University, Vol. 1,
MIT Press, Cambridge Mass. (1970) .
W. Zimmermann: Ann. Phys. 77 (1973), 536 .
W. Zimmermann: Ann. Phys. 77 (1973), 570 .
J.H. Lowenstein: "Seminars on Renormalization Theory",
Vol. II, Maryland, Technical Report 73 - 068 (1972) .
- 5) S. Weinberg: Phys. Rev. 118 (1960) 838 .
- 6) N.N. Bogoliubov and D.W. Shirkov: Fortschr. d. Phys. 4
(1956), 438 .
- 7) N.N. Bogoliubov and O. Parasiuk: Acta Math. 97 (1957), 227 .
- 8) K. Hepp: Comm. Math. Phys. 2 (1966), 301 .
- 9) K. Symanzik: "Fundamental Interactions at High Energies",
ed. by A. Perlmutter et. al., (Gordon and Breach, 1970) .
- 10) M. Gell-Mann and M. Levy: Nuovo Cimento, 16 (1960), 705 .
- 11) B.W. Lee: Nucl. Phys. B9 (1969), 649 .
B.W. Lee: Cargèse Lectures in Physics 5 , ed. D. Bessis
(Gordon and Breach , New York, 1972) .
- 12) K. Wilson: Phys. Rev. 179 (1969), 1499 .
- 13) K. Symanzik: Cargèse Lectures in Physics 5, ed. D. Bessis
(Gordon and Breach, New York, 1972)
- 14) J.H. Lowenstein: Phys. Rev. D4 (1970), 2281 .
- 15) M. Gomes, J.H. Lowenstein, W. Zimmermann: Comm. Math.
Phys. 39 (1974), 81 .
- 16) J.H. Lowenstein, A. Rouet, R. Stora, W. Zimmermann:
Lectures given at the International Summer School on
"Renormalization and Invariance on Quantum Field Theory",
Capri 1973 .
- 17) F. Jegerlehner and B. Schroer: Nucl. Phys. B 68 (1974),
461 - 495 .

- 18) J.D. Bjorken und S.D. Drell: "Relativistische Quantenfeldtheorie", Bibliographisches Institut Mannheim, Hochschultaschenbücher-Verlag.
- 19) K. Wilson: Phys. Rev. 179 (1969), 1499.
- 20) C.G. Callan: Phys. Rev. D 2 (1970), 1541.
- 21) K. Symanzik: Comm. Math. Phys. 18 (1970), 227.
- 22) J.H. Lowenstein: Comm. Math. Phys. 24 (1971), 1.
- 23) M. Gomes, J.H. Lowenstein: Phys. Rev. D 7 (1973), 550.
- 24) K. Symanzik: in Springer Tracts in Modern Physics 57 (1971), 222.
- 25) K. Symanzik: Comm. Math. Phys. 23 (1971), 49.
- 26) H.J. Thun: Nuovo Cimento 26 A (1975), 329.
- 27) B. Schroer: "Renormalized Perturbation Theory: Achievements, Limitation and open Problems", FU Berlin Preprint 75/17.
- 28) J. Zinn-Justin: "Renormalization of Gauge Theories", Lecture Notes in PHYSICS 37 (BONN PROCEEDINGS 1974), Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York.
- 29) N. Bourbaki: ALGEBRE, Chapitre 4, § 5, 9.
- 30) M. Gell-Mann and F. Low: Phys. Rev. 95 (1954), 1300.
- 31) M. Gomes and B. Schroer: Phys. Rev. D 10 (1974), 3525.
- 32) J.H. Lowenstein: NYU Preprint NYU / TR 3 / 75.
- 33) J.H. Lowenstein, W. Zimmermann: Nucl. Phys. B 86 (1975), 77.
J.H. Lowenstein, W. Zimmermann: Comm. Math. Phys. (1975).

Danksagung:

Hiermit möchte ich Herrn Professor Dr. B. Schroer und Herrn Dr. F. Jegerlehner für die Stellung des Themas sowie ihre andauernde und hilfreiche Unterstützung während der Entstehung der Arbeit danken.

LEBENS LAUF

Name: MICHALK, LUTZ
geb. 16. 12. 1942 in Berlin
Eltern: Vater: MICHALK, Fritz
Polizeibeamter (gest. Mai 1945)
Mutter: MICHALK, Leni
Geschwister: 1 Bruder MICHALK, Volker
Familienstand: Verheiratet mit Angelika MICHALK geb. Tremper
Kinder: MICHALK, Alexander, 6 Jahre
MICHALK, Julia, 3 Jahre
Schulausbildung: 23. Grundschule in Berlin: 1. 9. 1949 bis 1. 4. 1955
danach Diesterweg Gymnasium in Berlin bis zum
Abitur im März 1961
Berufsausbildung: Seit 1961 Studium der Physik, Mathematik und
Chemie an der Freien Universität Berlin
(FU/Berlin)
1965: Vordiplom (Note: gut)
1967-1969: Diplomarbeit an der Bundesanstalt
für Materialprüfung (Thema: Nichtdispersive
Röntgenfluoreszenzanalyse) bei Prof. Neider
1969: Diplomhauptprüfung an der FU/Berlin
(Note: sehr gut)
1969-1972: Assistent bei Professor Mütter
am Institut für Theoretische Physik, FU/Berlin
1970: Beginn einer Promotion bei Professor Mütter
1971-1972: Nach Weggang von Professor Mütter
Assistent am Institut für Theoretische Physik an
der FU/Berlin
1972-1975: Fortsetzung der Promotion auf neuem
Gebiet bei Professor Schroer.

